Wer um die Behauptung weiß,
muss noch führen den Beweis.

Automatisierte algebraische Berechnungen an geometrischen Figuren

Prof. Dr. Heinz Schumann
PH Weingarten
Fak. II, Mathematik
schumann@ph-weingarten.de

47. Tagung für Didaktik der Mathematik
4. bis 8. März 2013
Universität Münster

Inhalt

1. Einleitung

2. DGS mit algebraischer Berechnungskomponente

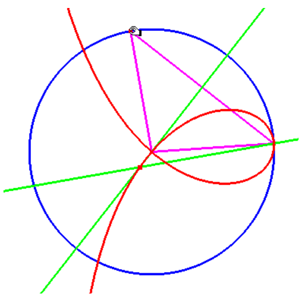
3. Zusammenfassung

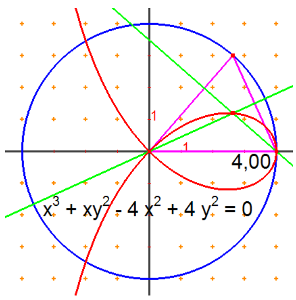
1. Einleitung

Cabri II+

Algebraische Kurven mit Cabri II+

Strophoide





Behauptung: $x^3+xy^2-rx^2+ry^2=0$ bzw. $(x-r)x^2 + (x+r)y^2 = 0$.

Wie ist nun die obige Gleichung zu verifizieren? Anhand der Abbildung leiten wir die Parameterdarstellung gemäß der Konstruktion von H(x;y) her, um durch Elimination des Laufparameters die entsprechende Gleichung zu gewinnen. Der Abbildung entnehmen wir:

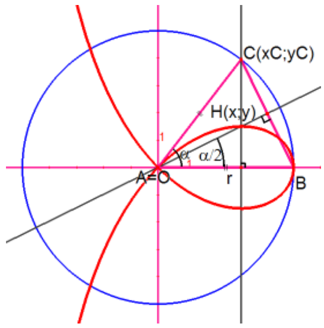
$$x = x_C = r\cdot\cos\alpha,\ \ y = x\tan\frac{\alpha}{2} = r\tan\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\,.$$

Dabei verwenden wir, dass h_a Winkelhalbierende im gleichschenkligen Dreieck ABC ist. Der Tangens wird durch einen Term mit Cosinus ersetzt:

$$y = r\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\cos\alpha \ \text{ bzw. } \ y^2 = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}r^2\cos^2\alpha\,.$$

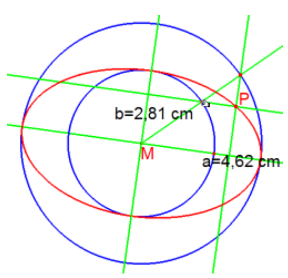
Mit $x = r\cdot\cos\alpha$ folgt $y^2 = \frac{r-x}{r+x}x^2$

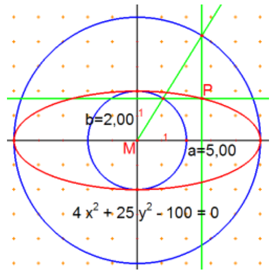
und daraus $(x-r)x^2 + (x+r)y^2 = 0$ bzw. $x^3+xy^2-rx^2+ry^2=0$.



Algebraische Kurven mit Cabri II+

Ellipse





Behauptung: $b^2x^2 + a^2y^2 = 1$

Nach dem 2. Strahlensatz gilt:

$b : y = a : y_2$

und nach dem Pythagoras-Satz

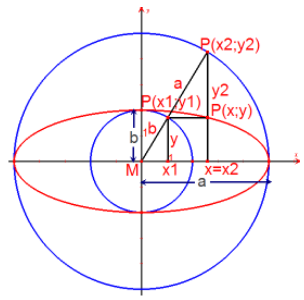
$y_2^2 = a^2 - x^2$;

also ist $b^2 : y^2 = a^2 : (a^2 - x^2)$.

Daraus folgt $b^2x^2 + a^2y^2 = 1$

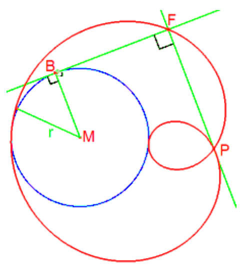
nach Multiplikation mit a^2b^2

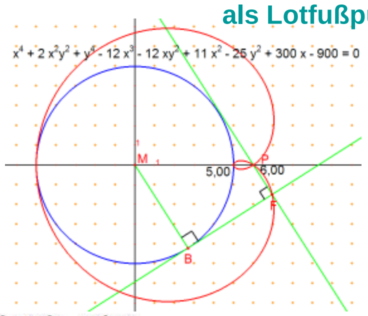
die Normalform $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.



Algebraische Kurven mit Cabri II+

Pascalsche Schnecke als Lotfußpunkt-Kurve





Behauptung: $(x^2 + y^2)^2 - 2px^3 - 2pxy^2 + (p^2 - r^2)x - r^2y^2 + 2pr^2x - (pr)^2 = 0$

Aus der Abbildung entnehmen wir:

$x_B = r\cdot\cos\beta,\ y_B = r\cdot\sin\beta \quad (1);$

die Tangentengleichung $\frac{y-y_B}{x-x_B} = -\frac{\cos\beta}{\sin\beta} \quad (2);$

die Lotgleichung $\frac{y}{x-p} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \quad (3).$

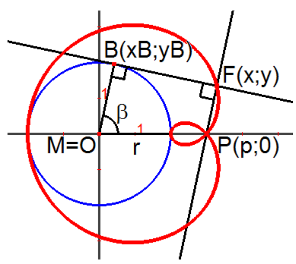
Nach Auflösen von (2) bzw. (3) nach y und Gleichsetzen erhalten wir für die x-Koordinate des Lotfußpunktes F:

$x = p\cdot\sin^2\beta + r\cdot\cos\beta \ (4a)$

und durch Ersetzung von x in (3) mit (4a) die y-Koordinate von F

$y = \sin\beta\cdot(r - p\cdot\cos\beta) \ (4b).$

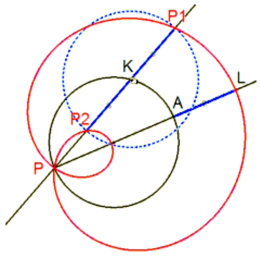
Mit MATHEMATICA erhalten wir mittels des Eliminationskommandos sofort das gewünschte Ergebnis, wenn wir vorher den Sinus noch durch den Cosinus ausdrücken:

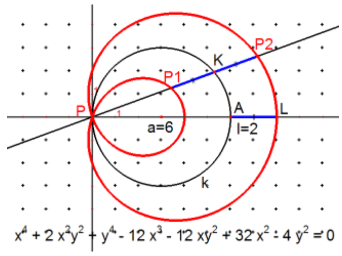



```
Eliminate[{x == p*(1 - (Cos(β))^2) + r*Cos(β), y == Sqrt[1 - (Cos(β))^2]*(r - p*Cos(β))}, β]
-2 p x^3 + x^4 + p x (2 r^2 - 2 y^2) + x^2 (p^2 - r^2 + 2 y^2) == p^2 r^2 + r^2 y^2 - y^4
```

Algebraische Kurven mit Cabri II+

Pascalsche Schnecke als Konchoide („Muschellinie“)



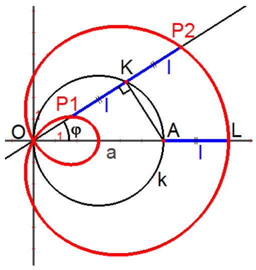


Die Konchoide einer Kurve k bezüglich eines Pols O besteht aus allen Punkten P für die gilt: Ist K ein beweglicher Punkt auf Kreis k und l eine fest gewählte Länge, so liegen OKP auf einer Geraden und es ist |OP| = |OK| + l bzw. |OP| = |OK| - l. Die konstruktiven Parameter sind der Kreisdurchmesser a und die Länge l.

Behauptung: $(x^2 + y^2)^2 - 2ax^3 - 2axy^2 + (a^2 - l^2)x^2 - l^2y^2 = 0$
Man erkennt bzw. findet heraus, ähnlich wie bei der Lotfußpunktkurve durch Variation ganzzahliger Parameterwerte, folgende Abhängigkeit der Koeffizienten bezüglich des gewählten Koordinatensystems: Der konchoidalen Konstruktion lesen wir sofort die Polarkoordinaten-Darstellung ab:

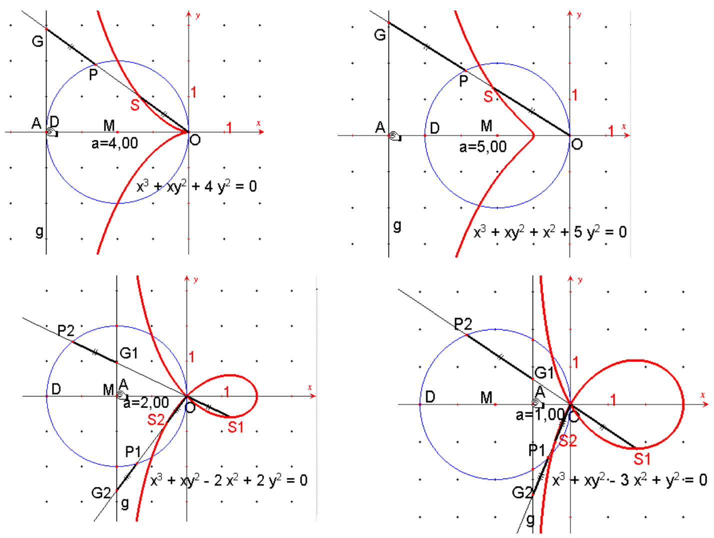
$$\rho = a \cdot \cos\varphi \pm l, \ \cos\varphi = \frac{x}{\rho} \ \text{ und } \ \rho = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Aus dieser ergibt sich $(x^2+y^2-ax^2)^2 = l^2(x^2+y^2)$
bzw. $(x^2 + y^2)^2 - 2ax^3 - 2axy^2 + (a^2 - l^2)x^2 - l^2y^2 = 0$.



Algebraische Kurven mit Cabri II+

Hypokissoide



Behauptung: $x^3+xy^2+(a-d)x^2+ay^2=0$

Algebraische Kurven mit Cabri II+

Eine Methode zur Behandlung algebraischer Kurven

1) Zirkel-Lineal-Konstruktion der algebraischen Kurve in Cabri II+
2) Einbettung in kartesisches Koordinatensystem
3) Automatische Bestimmung der algebraischen Gleichung
4) Bindung der konstruktiven Parameterobjekte an Gitter
5) Zusammenhang: Konstruktionsparameter – Koeffizienten
6) Mathematische Verifikation

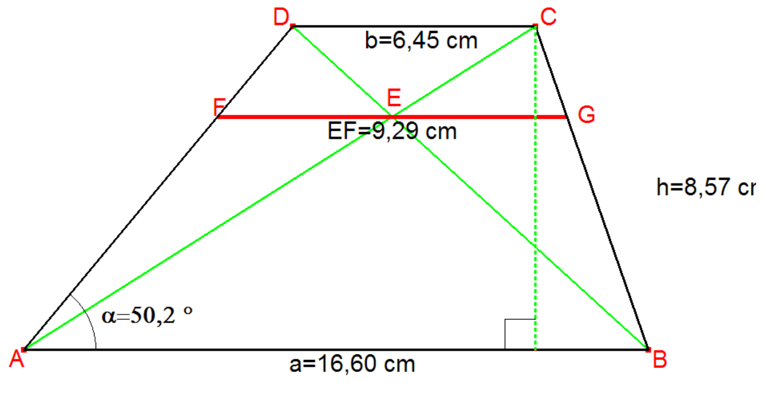
Schumann, H. (2001): Ein dynamischer Zugang zu „einfachen“ algebraischen Kurven. In: math. did., Jg. 25, Bd. 1, 79-101

**Kann man prinzipiell
an interaktiv konstruierten
geometrischen Figuren
<u>automatisierte algebraische Berechnungen</u>
durchführen?**

©2013 Dr. Heinz Schumann, Eulenweg 12, D-88289 Waldburg, Vortrag 47. Jahrestagung der GDM 2013, Universität Münster

2. DGS mit algebraischer Berechnungskomponente

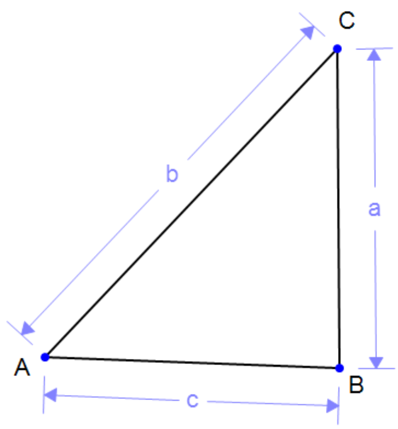
Was hängt Wie von Wem ab?



Themen

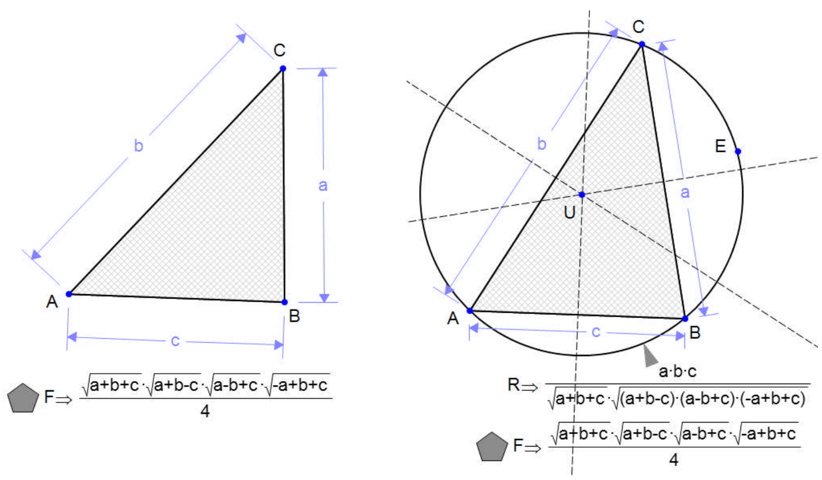
- Dreiecksgeometrie
- Kreistangenten
- Kreisberührungen
- Algebraische Kurven

Dreiecksgeometrie mit GX



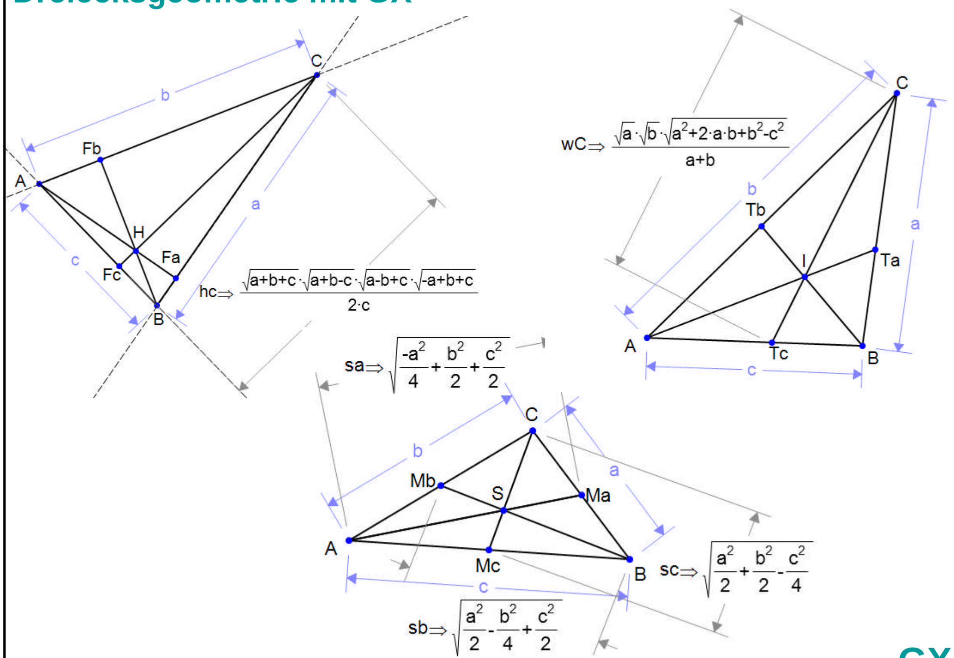
GX

Dreiecksgeometrie mit GX



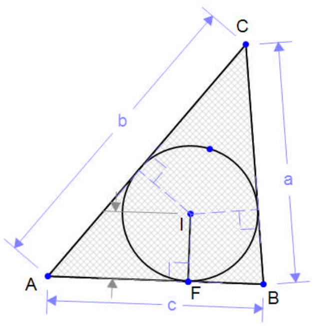
GX

Dreiecksgeometrie mit GX



GX

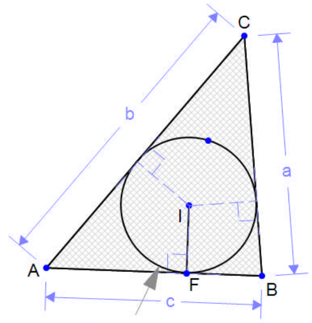
Dreiecksgeometrie mit GX



$$r \Rightarrow \frac{\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{2\cdot\sqrt{a+b+c}}$$

$$F \Rightarrow \frac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{4}$$

$$\frac{F}{r} \Rightarrow \frac{a+b+c}{2}$$



$r \Rightarrow \sim 1.7638227$

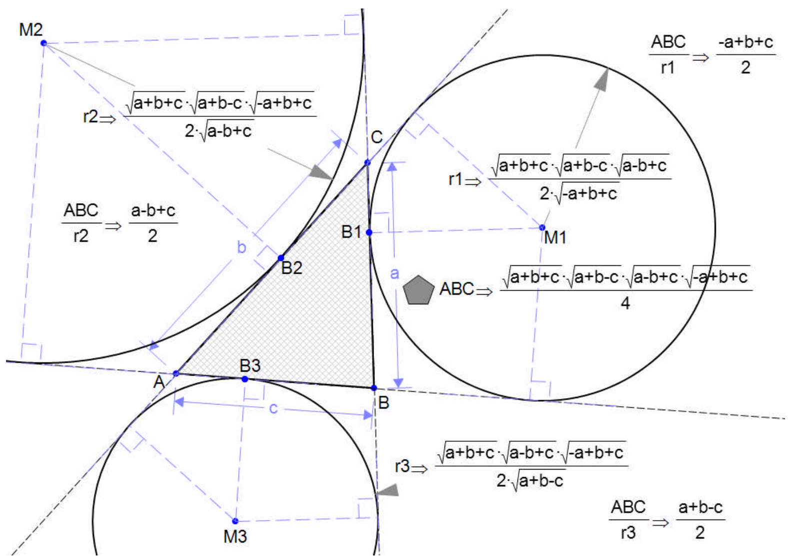
$F \Rightarrow \sim 17.479502$

$\frac{F}{r} \Rightarrow 9.9100108$

Name	Value
a	6.2718038
b	7.9401801
c	5.6080377

GX

Dreiecksgeometrie mit GX



$$\frac{ABC}{r1} \Rightarrow \frac{-a+b+c}{2}$$

$$r2 \Rightarrow \frac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{2\cdot\sqrt{a-b+c}}$$

$$r1 \Rightarrow \frac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}}{2\cdot\sqrt{-a+b+c}}$$

$$\frac{ABC}{r2} \Rightarrow \frac{a-b+c}{2}$$

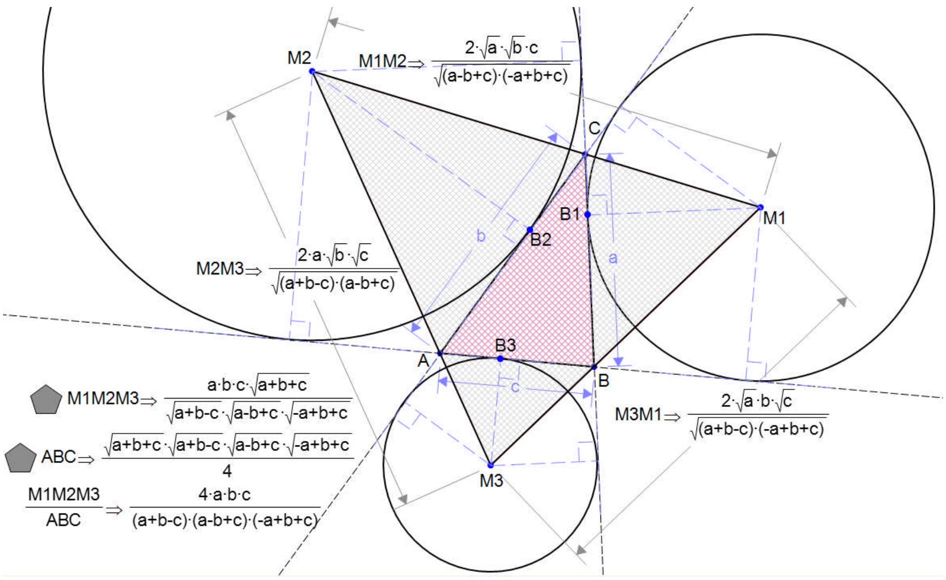
$$ABC \Rightarrow \frac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{4}$$

$$r3 \Rightarrow \frac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{2\cdot\sqrt{a+b-c}}$$

$$\frac{ABC}{r3} \Rightarrow \frac{a+b-c}{2}$$

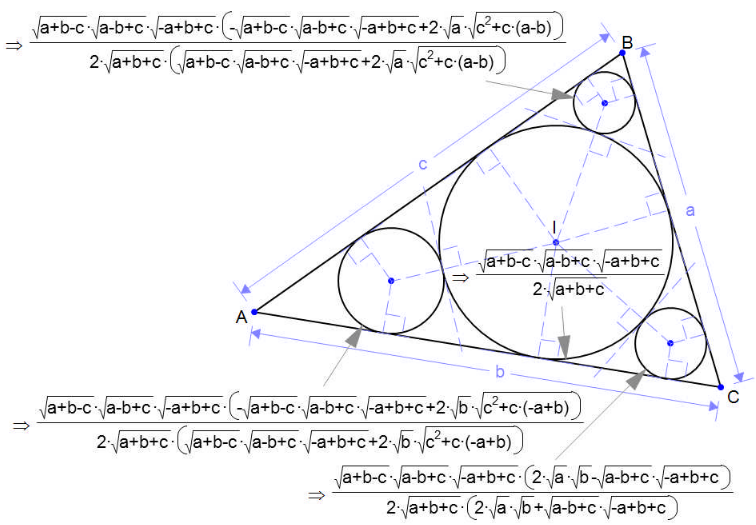
GX

Dreiecksgeometrie mit GX



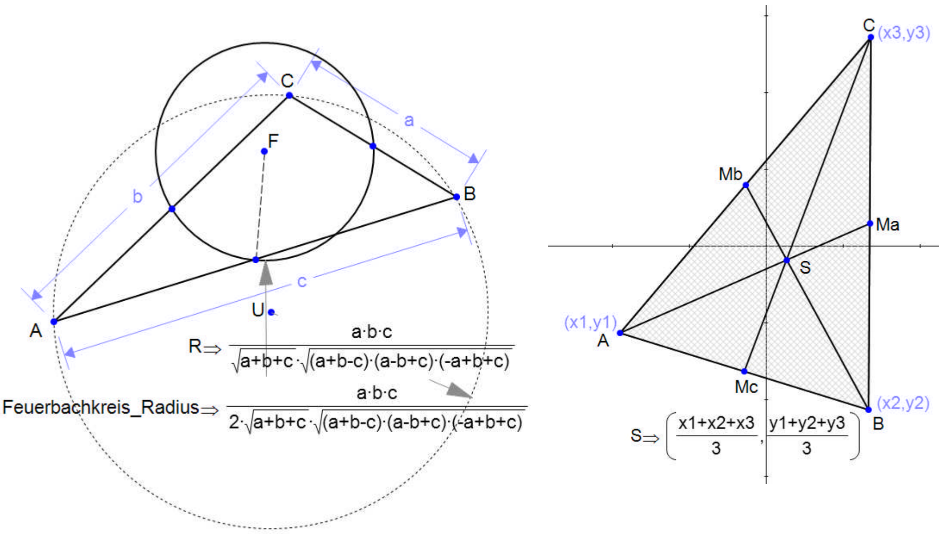
 GX

Dreiecksgeometrie mit GX



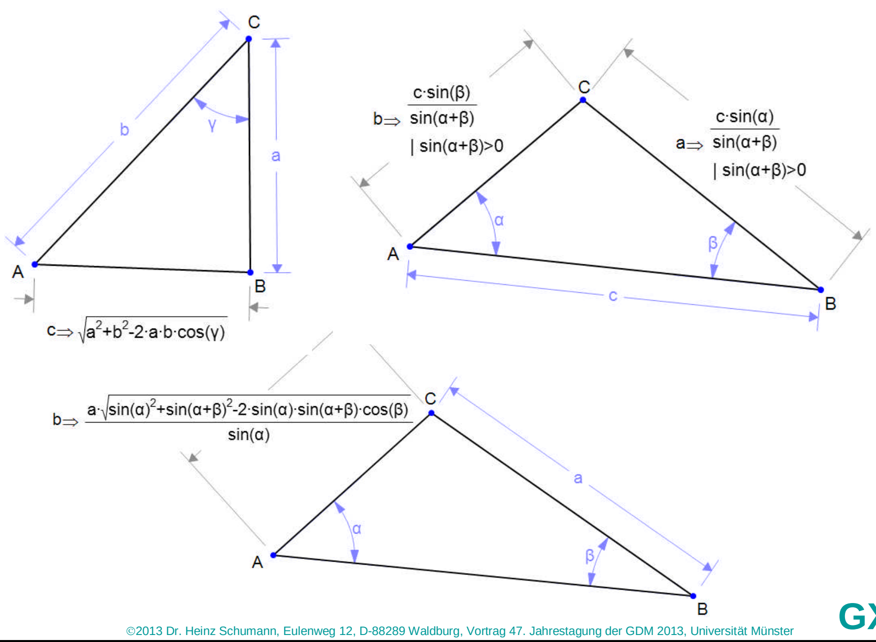
 GX

Dreiecksgeometrie mit GX



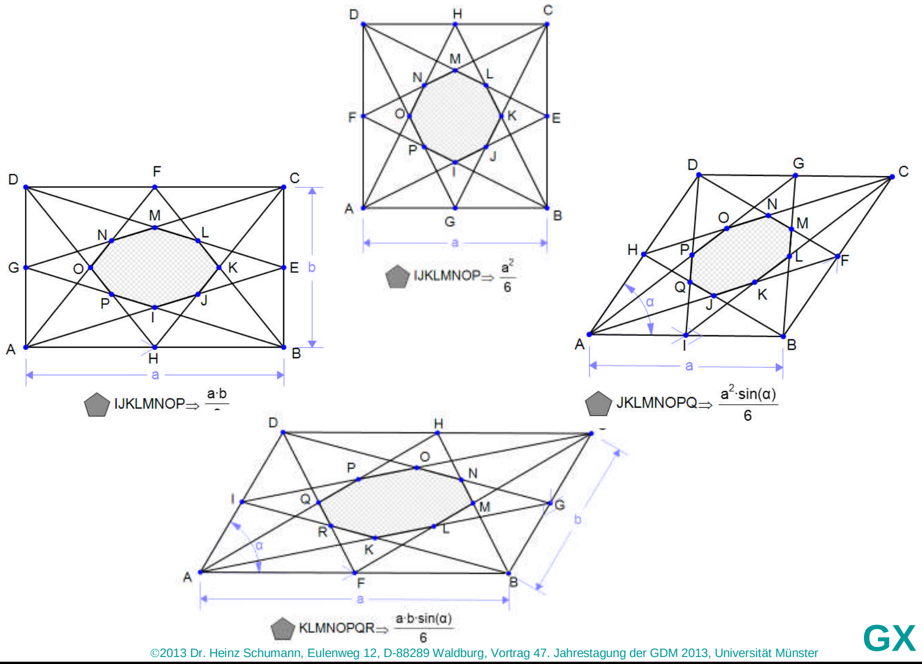
GX

Dreiecksgeometrie mit GX



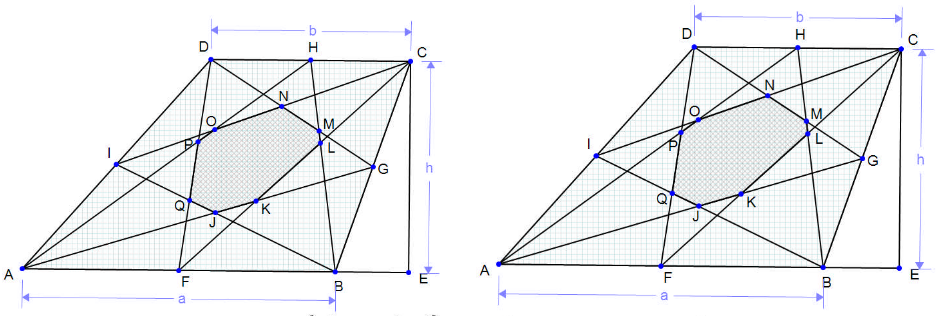
GX

Vierecksgeometrie mit GX



GX

Vierecksgeometrie mit GX



ABCD $\Rightarrow \frac{h\cdot(a+b)}{2}$ KLMNOPQJ $\Rightarrow \frac{a\cdot h\cdot\left(5\cdot a^2\cdot b+22\cdot a\cdot b^2+5\cdot b^3\right)}{6\cdot(a+b)\cdot(a+3\cdot b)\cdot(3\cdot a+b)}$

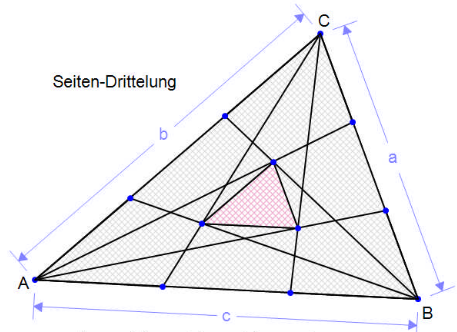
ABCD $\Rightarrow$ ~56.818411 JKLMNOPQ $\Rightarrow$ ~8.9534878

$\frac{\text{ABCD}}{6} \Rightarrow 9.4697351$

Name	Value
a	10.133523
b	6.4708413
h	6.8437925

GX

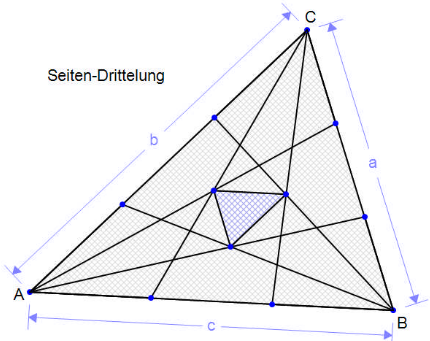
Dreiecksgeometrie mit GX



$$F \Rightarrow \frac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{4} \qquad u \Rightarrow a+b+c$$

$$F1 \Rightarrow \frac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{64} \qquad u1 \Rightarrow \frac{a+b+c}{4}$$

$$\frac{F}{F1} \Rightarrow 16 \qquad \frac{u}{u1} \Rightarrow 4$$



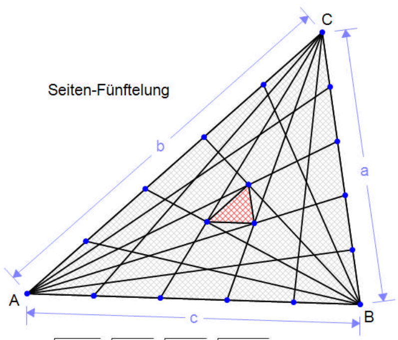
$$F \Rightarrow \frac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{4} \qquad u \Rightarrow a+b+c$$

$$F2 \Rightarrow \frac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{100} \qquad u2 \Rightarrow \frac{a+b+c}{5}$$

$$\frac{F}{F2} \Rightarrow 25 \qquad \frac{u}{u2} \Rightarrow 5$$

GX

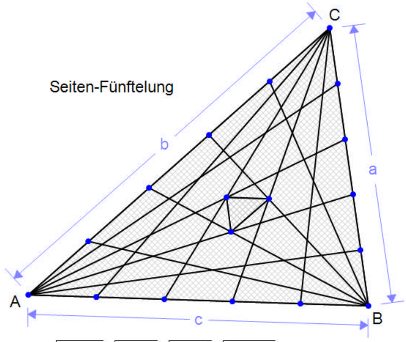
Dreiecksgeometrie mit GX



$$F \Rightarrow \frac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{4} \qquad u \Rightarrow a+b+c$$

$$F1 \Rightarrow \frac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{196} \qquad u1 \Rightarrow \frac{a+b+c}{7}$$

$$\frac{F}{F1} \Rightarrow 49 \qquad \frac{u}{u1} \Rightarrow 7$$



$$F \Rightarrow \frac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{4} \qquad u \Rightarrow a+b+c$$

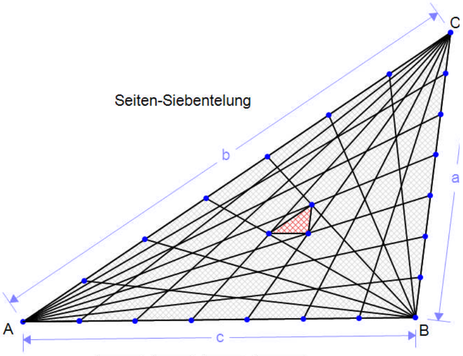
$$F2 \Rightarrow \frac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{256} \qquad u2 \Rightarrow \frac{a+b+c}{8}$$

$$\frac{F}{F2} \Rightarrow 64 \qquad \frac{u}{u2} \Rightarrow 8$$

©2013 Dr. Heinz Schumann, Eulenweg 12, D-88289 Waldburg, Vortrag 47. Jahrestagung der GDM 2013, Universität Münster

GX

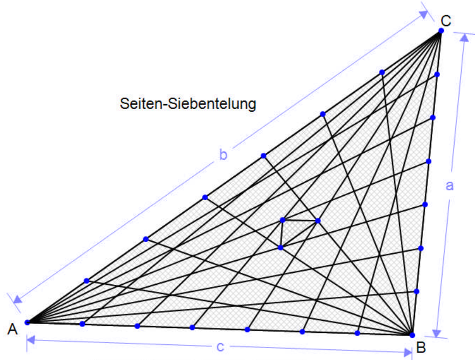
Dreiecksgeometrie mit GX



$F \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{4}$ $\quad u \Rightarrow a+b+c$

$F1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{400}$ $\quad u1 \Rightarrow \dfrac{a+b+c}{10}$

$\dfrac{F}{F1} \Rightarrow 100 \qquad \dfrac{u}{u1} \Rightarrow 10$



$F \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{4}$ $\quad u \Rightarrow a+b+c$

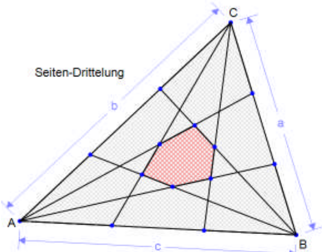
$F2 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{484}$ $\quad u2 \Rightarrow \dfrac{a+b+c}{11}$

$\dfrac{F}{F2} \Rightarrow 121 \qquad \dfrac{u}{u2} \Rightarrow 11$

$$\frac{u}{u1} = \frac{3n-1}{2},\ \frac{F}{F1} = \left(\frac{3n-1}{2}\right)^2;\ \frac{u}{u2} = \frac{3n+1}{2},\ \frac{F}{F2} = \left(\frac{3n+1}{2}\right)^2,\ n = 3, 5, 7, \ldots$$

GX

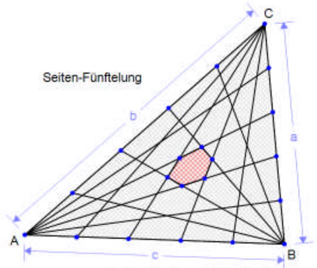
Dreiecksgeometrie mit GX



$\text{Dreieck} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{4}$

$\text{Sechseck} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{40}$

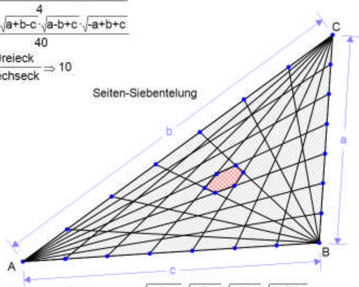
$Q3: \dfrac{\text{Dreieck}}{\text{Sechseck}} \Rightarrow 10$



$\text{Dreieck} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{4}$

$\text{Sechseck} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{112}$

$Q5: \dfrac{\text{Dreieck}}{\text{Sechseck}} \Rightarrow 28$



$\text{Dreieck} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{4}$

$\text{Sechseck} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{220}$

$Q7: \dfrac{\text{Dreieck}}{\text{Sechseck}} \Rightarrow 55$

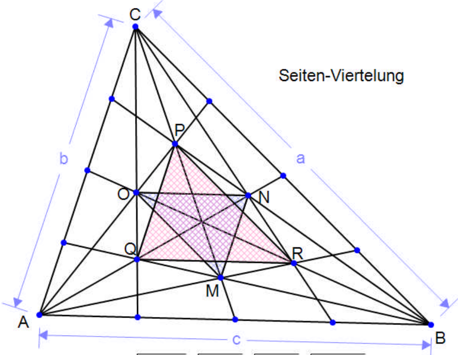
Dreieck/Sechseck

= (3n+1)(3n-1)/8

für n = 3, 5, 7, …

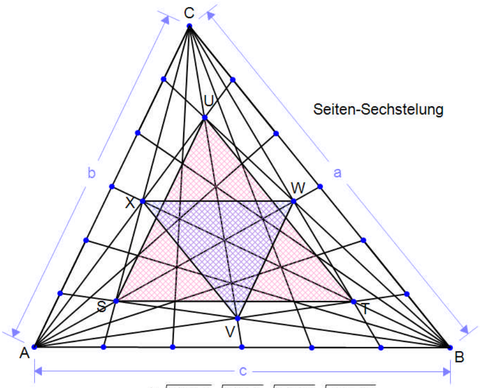
GX

Dreiecksgeometrie mit GX



PQR $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{25}$

MNO $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{49}$

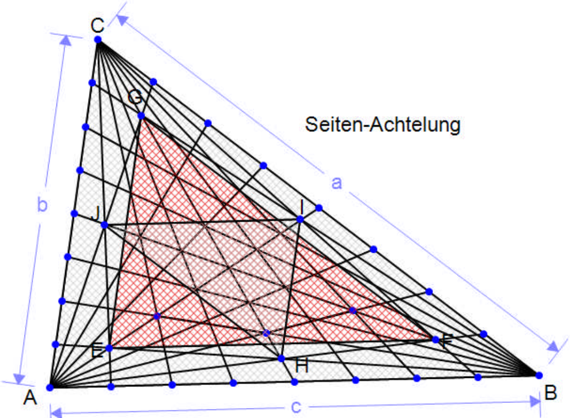


UST $\Rightarrow \dfrac{4\cdot\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{49}$

VWX $\Rightarrow \dfrac{4\cdot\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{121}$

GX

Dreiecksgeometrie mit GX



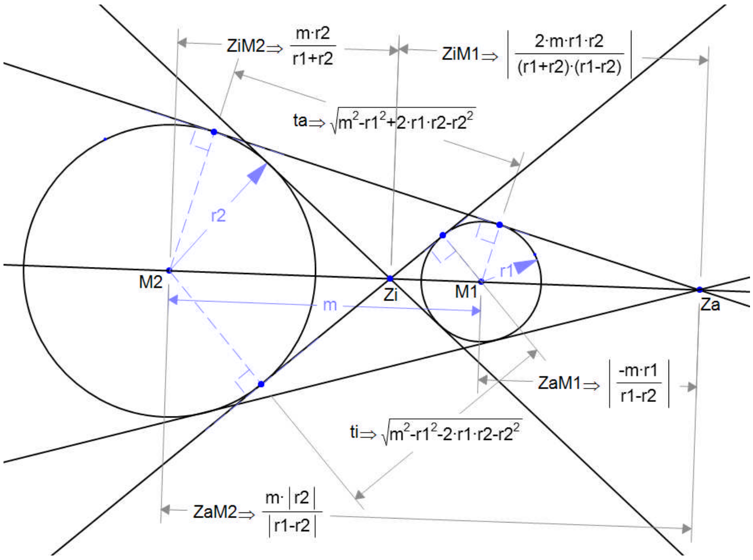
ABC $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{4}$

EFG $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{9}$

HIJ $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{a+b-c}\cdot\sqrt{a-b+c}\cdot\sqrt{-a+b+c}}{25}$

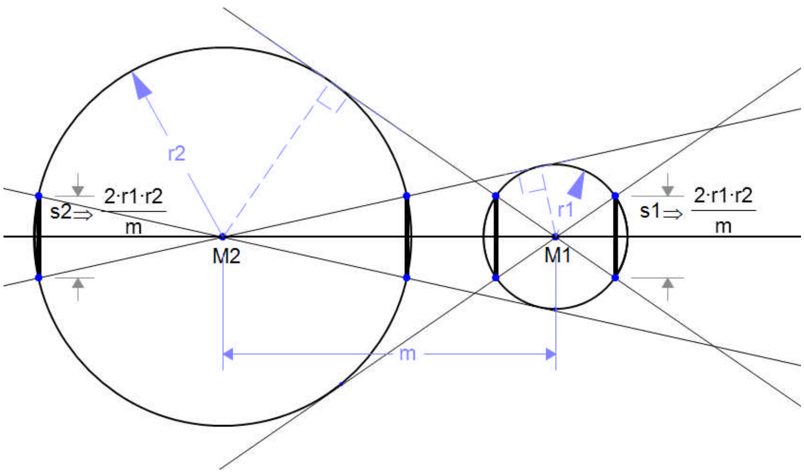
GX

Kreistangenten mit GX



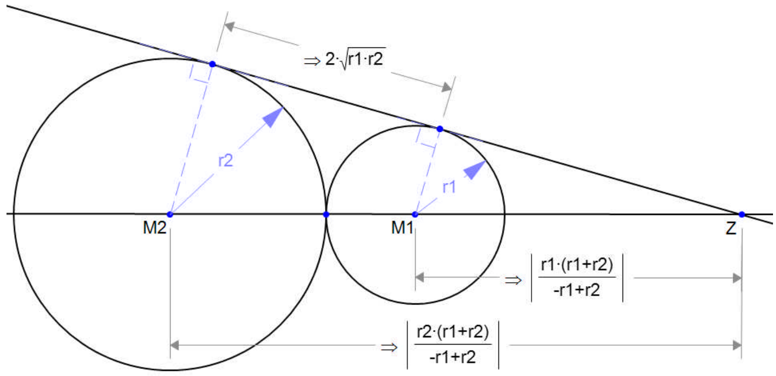
GX

Kreistangenten mit GX



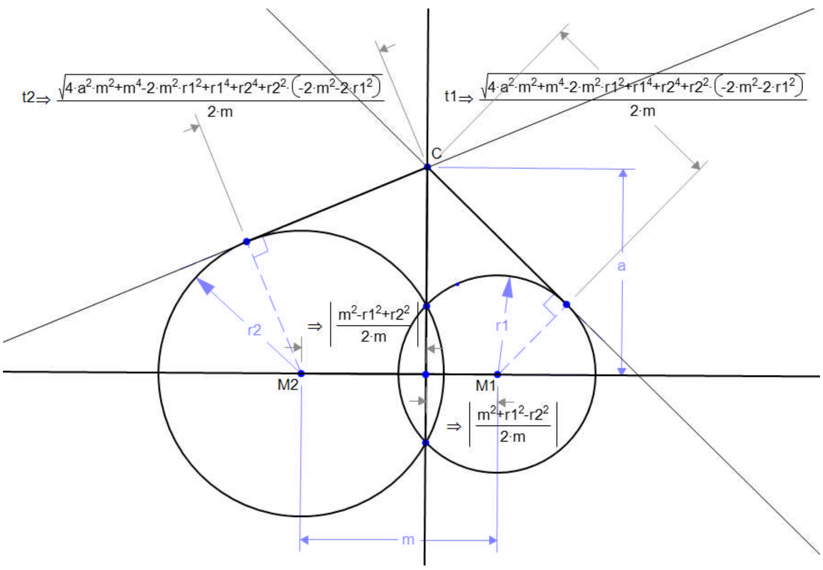
GX

Kreistangenten mit GX



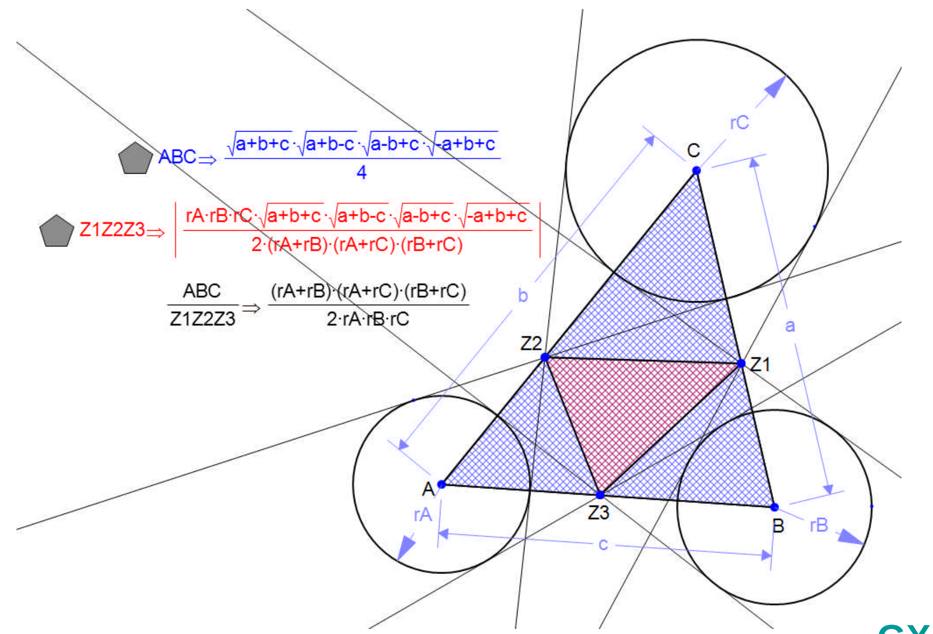
GX

Kreistangenten mit GX



GX

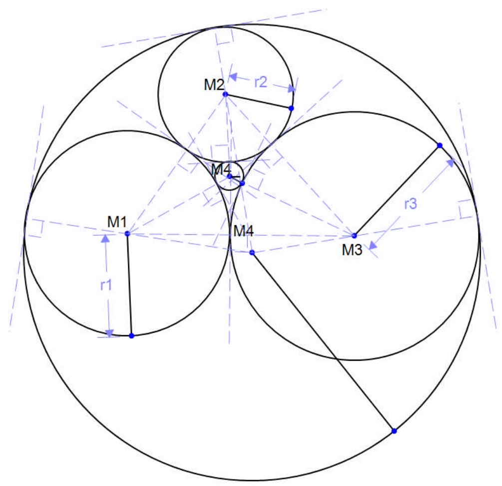
Kreistangenten mit GX



GX

Kreisberührungen mit GX

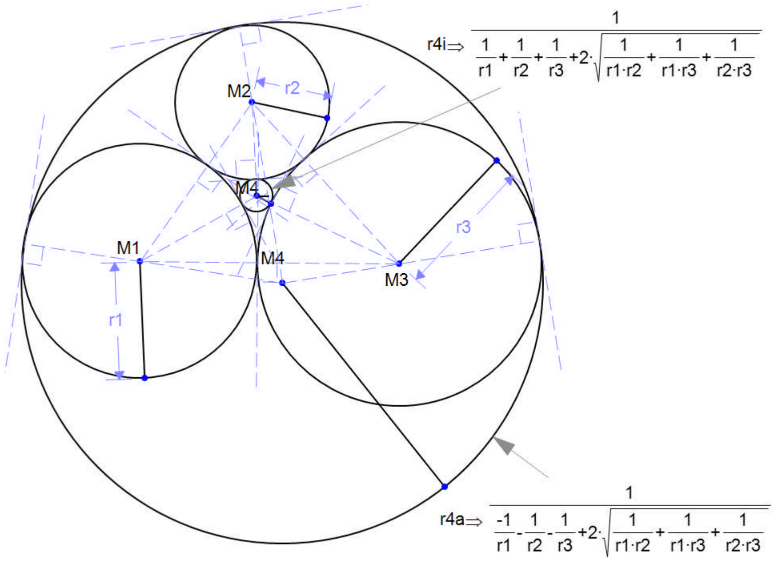
Das Berührungsproblem des Apollonius



Soddy-Konfiguration

GX

Kreisberührungen mit GX



GX

Kreisberührungen mit GX

$$r_4 = \frac{1}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+2\sqrt{\frac{1}{r_1\cdot r_2}+\frac{1}{r_2\cdot r_3}+\frac{1}{r_3\cdot r_1}}}$$

$$2\sqrt{\frac{1}{r_1\cdot r_2}+\frac{1}{r_2\cdot r_3}+\frac{1}{r_3\cdot r_1}} = -\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}$$

$$2\sqrt{\kappa_1\cdot\kappa_2+\kappa_2\cdot\kappa_3+\kappa_3\cdot\kappa_1} = -\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3+\kappa_4$$

Krümmung des i-ten Kreises: $\kappa_i = \frac{1}{r_i}, i = 1,2,3,4$

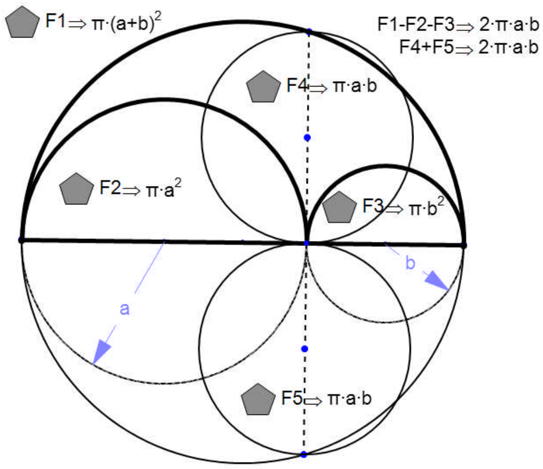
Umformung ergibt:

$$(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4)^2 = 2(\kappa_1^2+\kappa_2^2+\kappa_3^2+\kappa_4^2)^2$$

Das Quadrat der Summe der Krümmungen ist gleich dem Doppelten der Quadratsumme der Krümmungen.

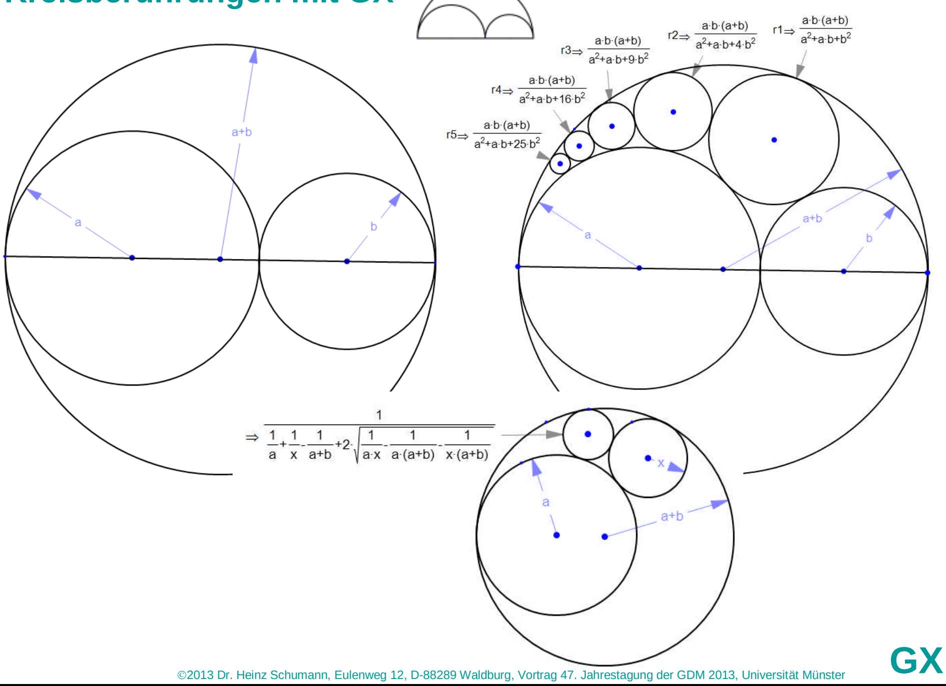
4-Kreise-Satz von Descartes

Kreisberührungen mit GX



GX

Kreisberührungen mit GX

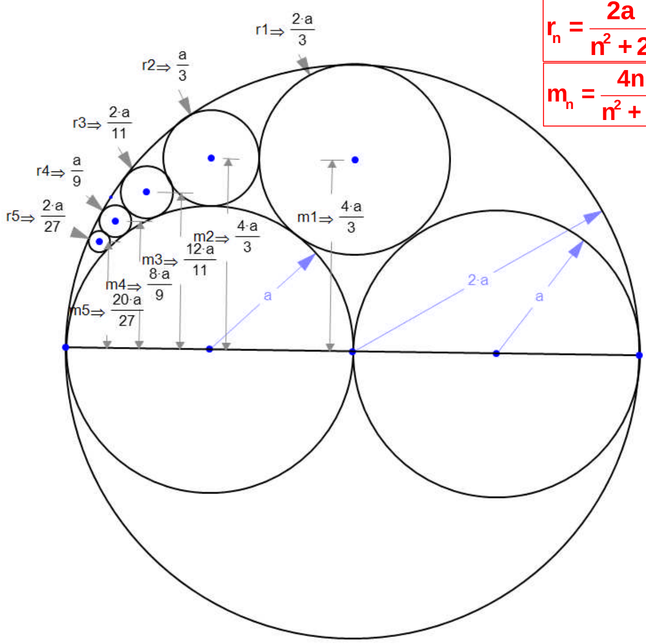


GX

Kreisberührungen mit GX

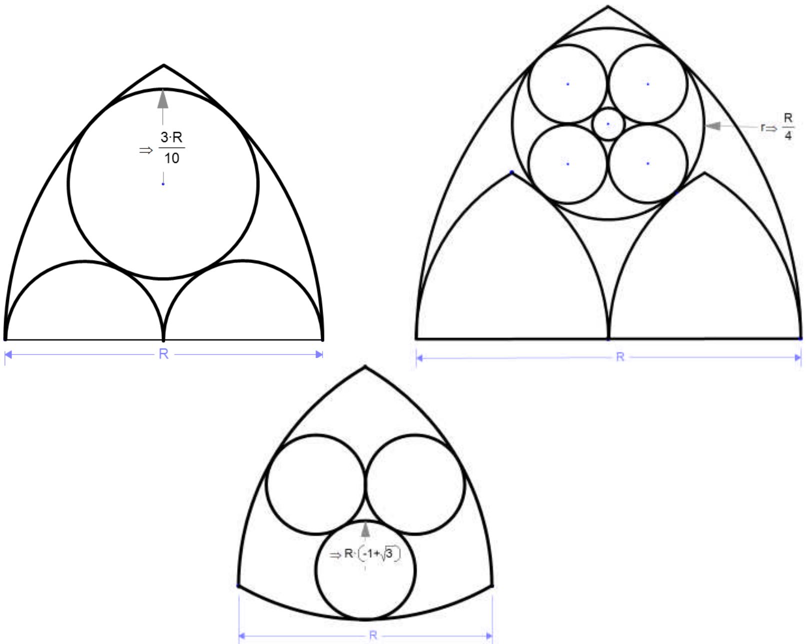
$$r_n = \frac{2a}{n^2+2}, n = 1,2,3,\ldots$$

$$m_n = \frac{4n}{n^2+2}, n = 1,2,3,\ldots$$



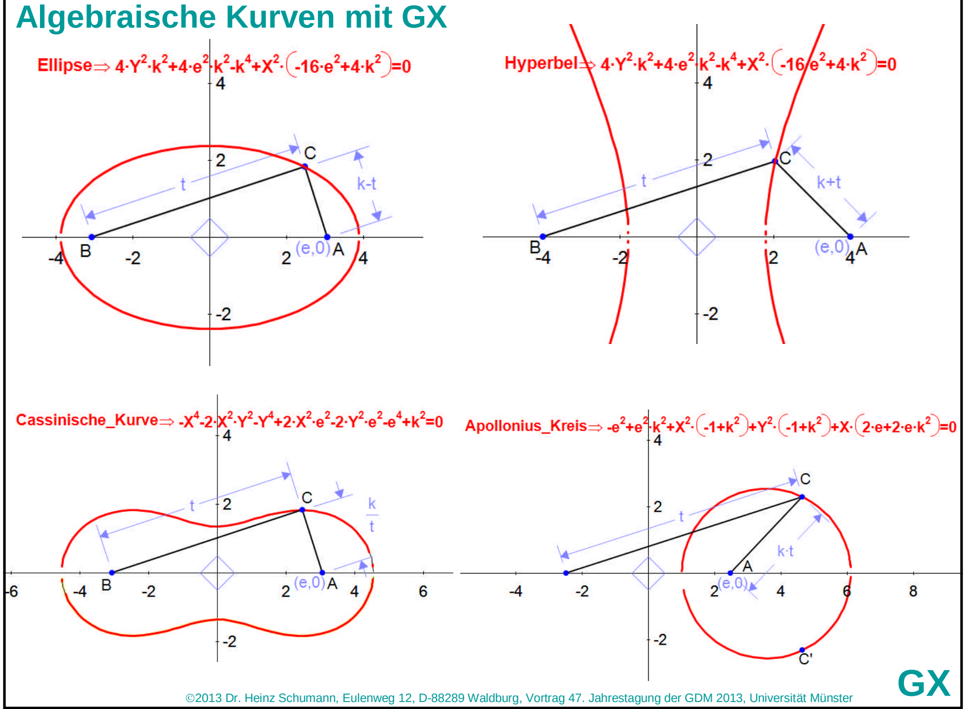
GX

Kreisberührungen mit GX

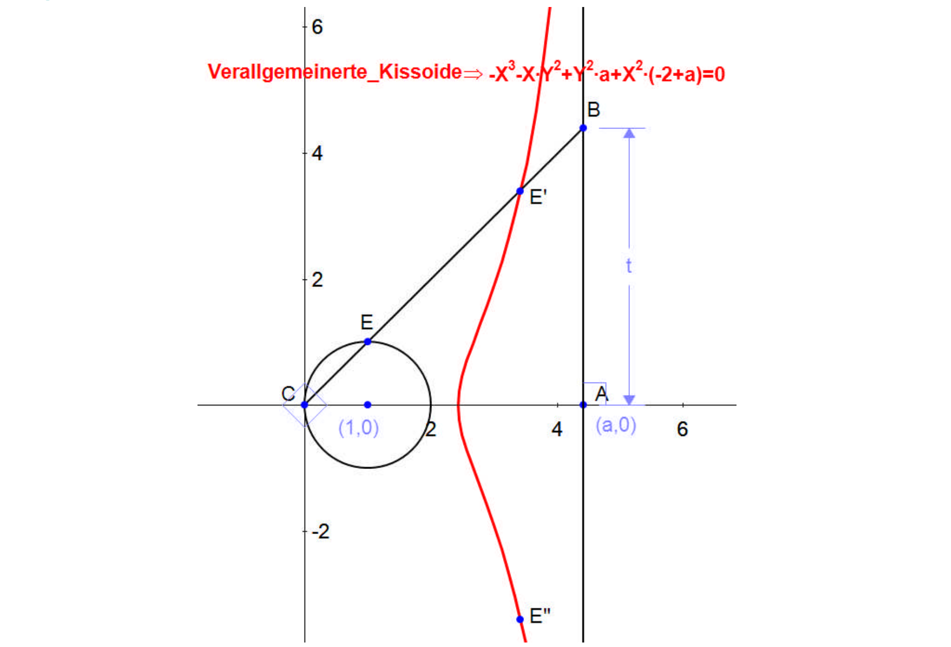


GX

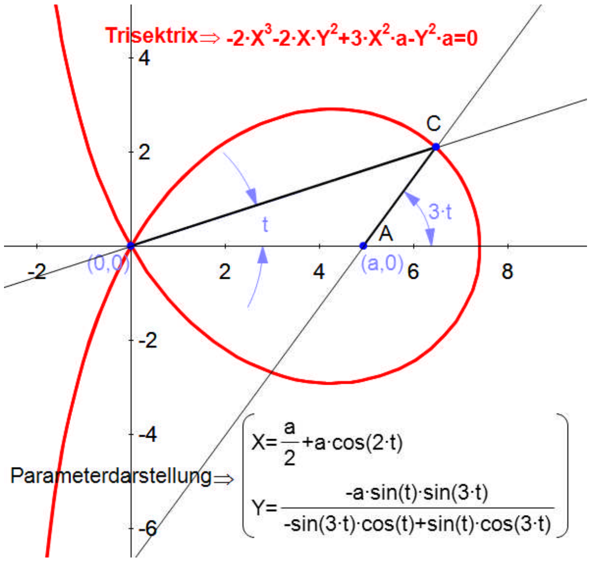
Algebraische Kurven mit GX



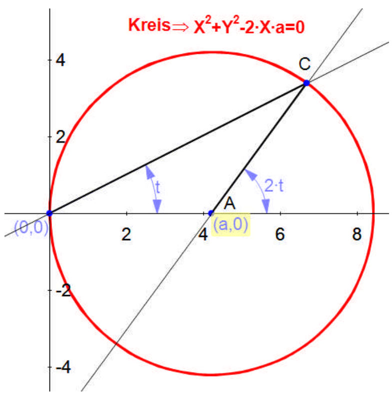
Algebraische Kurven mit GX

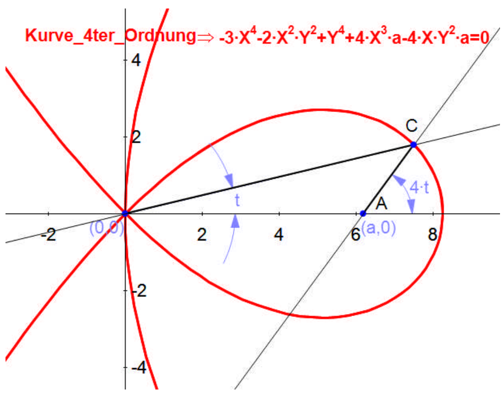


Algebraische Kurven mit GX

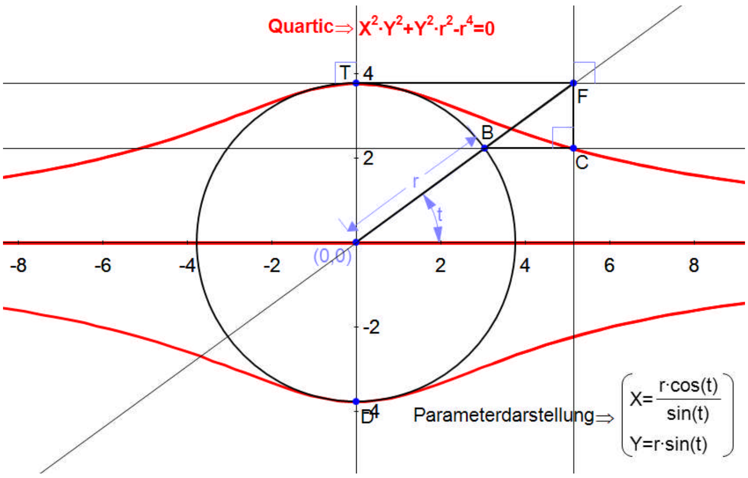


Algebraische Kurven mit GX

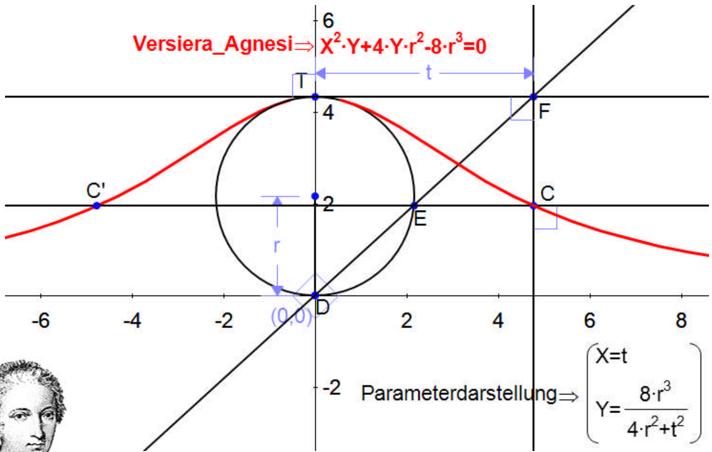




Algebraische Kurven mit GX

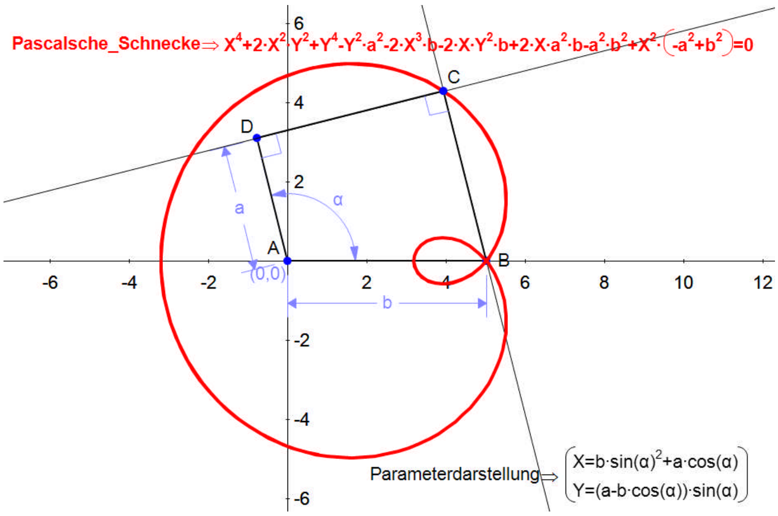


Algebraische Kurven mit GX



Maria Gaetana Agnesi (1718 – 1799), italienische Mathematikerin und Philanthropin
http://de.wikipedia.org/wiki/Maria_Gaetana_Agnesi

Algebraische Kurven mit GX

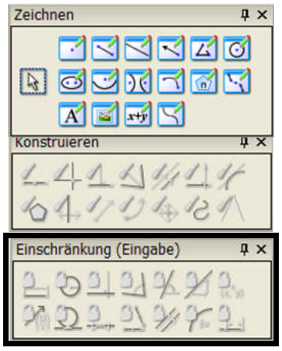


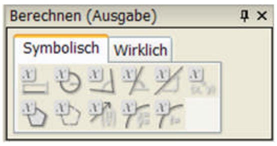
3. Zusammenfassung

DGS constrait based

Eingabe → ***Verarbeitung*** **(Black Box)** → **Ausgabe**

Konstruktion
einer geometrischen Figur mit den sie bestimmenden Parametern bzw. Zwangsbedingungen → ***Verarbeitung*** **Berechnung mit Methoden der Automated Deduction in Geometry (ADG)** → **Algebraische Eigenschaft der Figur (Gleichung, Formel)**





Voraussetzung → ***Beweis*** → **Behauptung**
Eigenschaften der Figur, abhängig von ihren Konstruktions-parametern bzw. Zwangsbedingungen **?** **Gleichung, Formel**

Interpolationsproblem

Gegebenes → **Gesuchtes**
Lösungsweg? (bekannt)

Entdecken von Gesetzmäßigkeiten
Anwendung heuristischer Strategien
Generalisieren – Variieren – Analogisieren

Informelle Bedeutung

Der Vorteil
der automatisierten algebraischen Berechnungen
gegenüber den DGS-Messungen
an geometrischen Figuren
besteht in der Angabe der Abhängigkeit
der zu bestimmenden von den gegebenen Größen.

Verschiedene PROBLEME

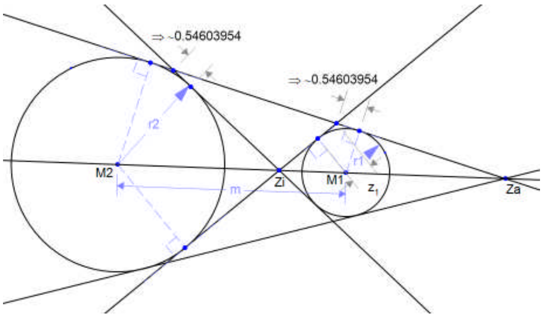
Die Einarbeitung in die Nutzung ist aufwendiger als in die der Nutzung von DGS!

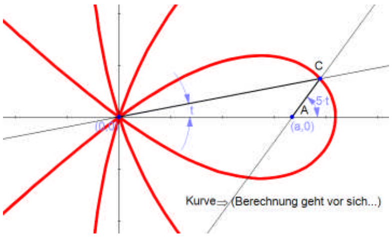
Eine erfolgreiche Nutzung setzt voraus die Beantwortung der Frage: Welche Größen reichen aus, um die gesuchten Größen zu berechnen?

Die Berechnungen führen oft auf komplizierte Terme, die verstanden, interpretiert und verglichen werden müssen.

Unsicherheit: Bei sehr komplexem Zusammenhang zwischen gegebenen und gesuchten Größen versagt das Berechnungsverfahren oft.

Grenzen des Werkzeugs GX





Auswahl werkzeuggeeigneter Aufgaben

- Aufgabenselektionismus

Notwendigkeit der Weiterbearbeitung der algebraischen Ausdrücke

Alle Ausdrücke haben MathML-Format:

Export nach *Mathematica*, *Maple*, … und nicht nach *DERIVE*

Export der Figuren

Animation files
HTML
Image files
JavaScript Applet animated example
JavaScript Applet example
JavaScript files
Lua applets **TI-Nspire**
widgets

Prognose

Unter dem Eindruck beschränkter unterrichtlicher Zeitressourcen und der Schwerpunktsetzung auf Prüfungen durch Tests und der damit verbundenen Reduktion anspruchsvollerer Inhalte des Mathematik-unterrichts, ist eine Integration neuer Geometrie-Themen nicht zu erwarten, selbst wenn diese durch neuartige dynamische Geometrie-Systeme zugänglich werden.

Allenfalls können Themen, die ebene synthetische Geometrie mit Algebra verbinden, Bearbeitung finden in

- Schulcurricula
- Projekten
- individualisierten Leistungsüberprüfungen
- Facharbeiten

oder bei extra-curricularen Aktivitäten.

Danke für Ihre Aufmerksamkeit !