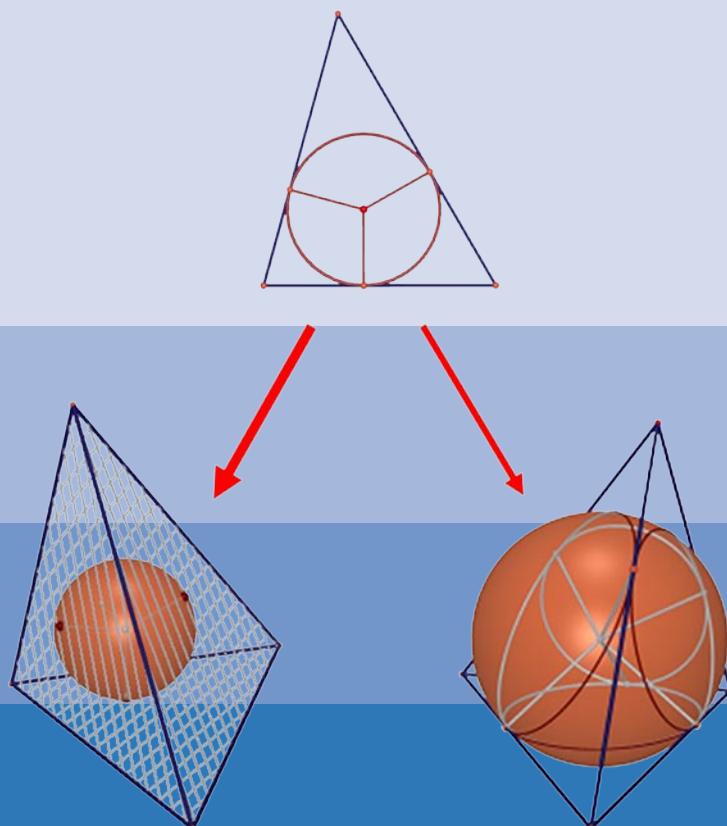


Heinz Schumann

Elementare Tetraedergeometrie

Eine Einführung in die Raumgeometrie



Heinz Schumann

Elementare Tetraedergeometrie

Eine Einführung in die Raumgeometrie

0.	Einleitung	1
1.	Besondere Tetraeder	11
1.1.	Das gleichkantige oder regelmäßige Tetraeder	13
1.1.1.	Konstruktionen des regelmäßigen Tetraeders	13
1.1.2.	Deckabbildungen des regelmäßigen Tetraeders	17
1.1.3.	Besondere Geraden und Punkte des regelmäßigen Tetraeders.....	19
1.1.4.	Berechnungen am regelmäßigen Tetraeder	20
1.1.5.	Sätze über das regelmäßige Tetraeder	22
1.1.6.	Lückenhafte Raumfüllung mit regelmäßigen Tetraedern	26
1.2.	Gleichseitige Tetraeder	29
1.2.1.	Eine erste Konstruktion gleichseitiger Tetraeder und erste Aussagen.....	29
1.2.2.	Eine zweite Konstruktion gleichseitiger Tetraeder und weitere Aussagen ..	38
1.2.3.	Einige weitere Kennzeichnungen gleichseitiger Tetraeder	43
1.2.4.	Berechnungen am gleichseitigen Tetraeder	46
1.2.5.	Die besonderen Kugeln gleichseitiger Tetraeder	49
1.2.6.	Das Höhen-Hyperboloid gleichseitiger Tetraeder	57
1.3.	Rechtwinklige Tetraeder	63
1.3.1.	Konstruktionen rechtwinkliger Tetraeder	63
1.3.2.	Berechnungen an rechtwinkligen Tetraedern	69
1.3.3.	Räumliche Analogisierung des Pythagoras-Satzes	74
1.3.4.	Tetraeder mit „Pythagoras-Eigenschaft“	79
1.3.5.	Einige Ungleichungen an rechtwinkligen Tetraedern.....	87
1.4.	„Rechteckige“ Tetraeder	91
1.4.1.	Existenz und Eigenschaften rechteckiger Tetraeder.....	91
1.4.2.	Weitere Konstruktionen rechteckiger Tetraeder.....	93
1.4.3.	Berechnungen am rechteckigen Tetraeder.....	94
1.4.4.	Symmetrische rechteckige Tetraeder	99
2.	Das allgemeine Tetraeder	101
2.1.	Tetraeder-Klassifikationen	103
2.1.1.	Klassifikation nach Symmetrie-Eigenschaften	103
2.1.2.	Klassifikation nach Kantengleichheit.....	121
2.1.3.	Klassifikation nach Innenwinkeln der Seitendreiecke	125
2.1.4.	Klassifikation nach Winkeln zwischen zwei Seitendreiecken.....	130
2.1.5.	Abschließende Bemerkung zu den Klassifikationen nach Winkeln.....	136
2.2.	Winkelmessungen am Tetraeder	139
2.2.1.	Die Summe der Kantenwinkel eines Tetraeders.....	139
2.2.2.	Abschätzung der Flächenwinkel-Summe eines Tetraeders.....	139
2.2.3.	Abschätzung der Raumwinkel-Summe eines Tetraeders	143
2.3.	Tetraederkonstruktionen	149
2.3.1.	Tetraederkonstruktionen aus Seitendreiecken und Flächenwinkeln	149
2.3.2.	Kongruenzsätze für Tetraeder mittels Seitendreiecken und Flächenwinkel	155
2.3.3.	Tetraederkonstruktionen aus Kanten und Kantenwinkeln.....	156
2.3.4.	Konstruktionen ähnlicher Tetraeder aus Kantenwinkeln.....	160
2.3.5.	Ähnlichkeitssätze über Tetraeder mittels Flächen- und Kantenwinkel	166

2.4.	Die Umkugel des Tetraeders	169
2.4.1.	Die Mittelsenkrechte einer Dreiecksfläche.....	169
2.4.2.	Konstruktion der Umkugel des Tetraeders.....	171
2.4.3.	Zur Lage des Umkugelmittelpunkts.....	173
2.4.4.	Der Umkugelradius als Term aus den Kantenlängen.....	175
2.4.5.	Eine analytische Berechnung der Lage des Umkugelmittelpunkts.....	183
2.5.	Die Inkugel des Tetraeders	187
2.5.1.	Abstandsgleiche Halbebenen.....	187
2.5.2.	Kanten- und Flächenabstandsgleiche einer dreikantigen Ecke.....	188
2.5.3.	Konstruktion der Inkugel des Tetraeders.....	192
2.5.4.	Analogien zwischen Um- und Inkreisen und Um- und Inkugeln.....	195
2.5.5.	Der Inkugelradius des Tetraeders.....	198
2.5.6.	Eine Beziehung zwischen In- und Umkugelradius des Tetraeders.....	198
2.5.7.	Tetraeder-Teilung durch Flächenabstandsgleiche und Flächenwinkel- halbierende.....	199
2.5.8.	Eine analytische Berechnung der Lage des Inkugelmittelpunkts.....	201
2.5.9.	Ein Satz über die Winkel an den Inkugel-Berührungspunkten.....	202
2.6.	Die flächenberührenden Kugeln des Tetraeders	205
2.6.1.	Die Raumteilung mittels eines Tetraeders.....	205
2.6.2.	Die flächenberührenden Kugeln und ihre Radienbeziehungen.....	206
2.6.3.	Zusammenfassung über die flächenberührenden Kugeln.....	216
2.7.	Der Schwerpunkt des Tetraeders	217
2.7.1.	Konstruktion des Tetraeder-Schwerpunkts.....	217
2.7.2.	Vektorielle Berechnung des Schwerpunkts.....	219
2.7.3.	Das Schwerpunktetetraeder.....	221
2.7.4.	Die Schwerpunktekugel.....	222
2.7.5.	Die Mittenparallelogramme und das Mittenoktaeder.....	223
2.7.6.	Beziehungen zwischen den Kanten eines Tetraeders und seinen Schwerlinien.....	226
2.8.	Die physikalischen Schwerpunkte des Tetraeders	229
2.8.1.	Die physikalischen Schwerpunkte des Dreiecks.....	231
2.8.2.	Der Ecken- und der Volumenschwerpunkt des Tetraeders.....	234
2.8.3.	Der Flächenschwerpunkt des Tetraeders.....	236
2.8.4.	Der Kantenschwerpunkt des Tetraeders.....	240
2.8.5.	Vektorielle Konstruktion der physikalischen Schwerpunkte.....	243
2.9.	Die Höhen des Tetraeders	247
2.9.1.	Aussagen über die Tetraederhöhen.....	247
2.9.2.	Der Punkt von Monge.....	254
2.9.3.	Das Höhen-Hyperboloid des Tetraeders.....	259
2.10.	Berechnungen am Tetraeder	263
2.10.1.	Die Standard-Volumenformel des Tetraeders.....	263
2.10.2.	Weitere Volumenformeln des Tetraeders.....	268
2.10.3.	Sinussätze am Tetraeder.....	279
2.10.4.	Kosinussätze am Tetraeder.....	281
2.10.5.	Einige vektorielle Berechnungsergebnisse am Tetraeder.....	289
2.11.	Ungleichungen am Tetraeder	291
2.11.1.	Von der Dreiecksungleichung zu Tetraederungleichungen.....	291
2.11.2.	Existenzaussagen für Tetraeder.....	296
2.11.3.	Anwendung von Standard-Ungleichungen.....	302

2.12.	Die Sätze von Menelaos und Ceva	303
2.12.1.	Der Satz von Menelaos für Dreiecke und für Tetraeder.....	303
2.12.2.	Der Satz von Ceva für Dreiecke und für Tetraeder.....	307
2.12.3.	Eine Anwendung des Satzes von CEVA auf Dreiecke und auf Tetraeder	314
2.13.	Verschiedenes	323
2.13.1.	Ebene Tetraederschnitte	323
2.13.2.	Minimierung der Tetraederoberfläche	337
2.13.3.	Der Lote-Satz von Jacob Steiner	350
2.13.4.	Satz von Miquel	360
2.13.5.	Der Satz von Desargues.....	366
3.	Besondere Tetraeder (Fortsetzung)	373
3.1.	Tetraeder mit Höhenschnittpunkt (orthozentrische Tetraeder)	375
3.1.1.	Einfache Konstruktionen orthozentrischer Tetraeder.....	375
3.1.2.	Lage des Höhenschnittpunkts.....	376
3.1.3.	Weitere Aussagen über orthozentrische Tetraeder	377
3.1.4.	Die Zwölfpunktekugeln	379
3.1.5.	Einige Berechnungen an orthozentrischen Tetraedern.....	388
3.2.	Tetraeder mit kantenberührender Kugel	395
3.2.1.	Notwendige Bedingungen für Tetraeder mit Kantenkugel-Eigenschaft....	395
3.2.2.	Hinreichende Bedingungen für ein Tetraeder mit Kantenkugel-Eigenschaft	396
3.2.3.	Konstruktion eines Tetraeders zu vorgegebener Kantenkugel	402
3.2.4.	Flächenwinkel-Kennzeichnung des Tetraeders mit Kantenkugel.....	404
3.2.5.	Formel für den Radius der Kantenkugel	406
3.2.6.	Beziehung des Tetraeders mit Kantenkugel zu den orthozentrischen und gleichseitigen Tetraedern	409
3.3.	Tetraeder mit gleichen Gegenkantenprodukten (isodynamische Tetraeder)	411
3.3.1.	Eine Konstruktion isodynamischer Tetraeder	411
3.3.2.	Beziehung isodynamischer Tetraeder zu anderen Tetraedertypen	411
3.3.3.	Kennzeichnungen isodynamischer Tetraeder.....	412
3.3.4.	Die Lemoine-Kreise und die Lemoine-Kugeln.....	415
	Quellenverzeichnis	419
	Anhang	435
	A1 Raumgeometrische Basisbegriffe und -aussagen	437
	A2 Geometrische Konstruktionen im Raum	449

Das Buch enthält **464 Seiten, 848 Abbildungen, 5 Diagramme, 11 Tabellen.**

Die raumgeometrischen Figuren sind mit Cabri 3D (www.cabri.com) konstruiert.

Anlage: CD mit Buch als Hypertext, Cabri 3D (30-Tage-Version) und Handbuch
Hinweise zur Installation und Benutzung in der Liesmich-Datei auf der CD.

ISBN 978-3-88120-520-7 (Buch mit CD), 978-3-88120-521-4 (nur CD)

Verkaufspreis (Buch plus CD): 37,80 €; Verkaufspreis nur CD: 20,- €

Verlag Franzbecker, Hildesheim und Berlin 2011

<http://www.franzbecker.de>