

## **Methoden der dynamischen Geometrie – eine Zusammenfassung**

Die Verwendung Dynamischer Geometrie-Systeme (DGS), die über einen entsprechenden Umfang an Optionen verfügen und die den aktuellen software-ergonomischen Standards genügen, führt zu neuen Methoden, (ebene) Elementargeometrie zu lehren und zu lernen bei der

- **Aneignung geometrischer Begriffe und Sätze**
- **Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben**
- **Lösung geometrischer Berechnungsaufgaben**
- **Behandlung und Anwendung der Abbildungsgeometrie**
- **Untersuchung und Anwendung von Relationen an geometrischen Figuren**
- **Verbindung von synthetischer und analytischer Geometrie**
- **Behandlung elementarer Funktionen**
- **geometrischen Modellierung und Simulation von Ausschnitten der Realität**
- **ästhetischen Gestaltung von und mit geometrischen Figuren**
- ...

Diese neuen Methoden basieren im Wesentlichen auf folgenden Programmeigenschaften von DGS:

- **Repertoire an konstruktiven Optionen**
- **Zug - Modus**
- **Makro - Konzept**
- **Automatisches Messen und Berechnen**
- **Erzeugen von Berechnungstermen**
- **Redefinition von Objekten**
- **Generierung von Ortslinien bzw. -kurven**
- **Schnittstelle zur Koordinatengeometrie**
- **Animation**
- **Bearbeitung und Verwaltung von Figuren**
- ...

DGS unterstützen folgende allgemeine Methoden der Erkenntnisfindung:

- **die induktive Methode**
- **die operative Methode**
- **das Generalisieren und Spezialisieren**
- **das Konkretisieren**
- **"Trial and Error"**
- **das experimentelle Arbeiten**
- **die Komplexitätsreduktion**
- **das modulare Arbeiten**
- **das Rückwärtsarbeiten**
- ...

DGS unterstützen, wie auch andere Computerwerkzeuge, die inhaltliche Anreicherung („Enrichment“) und die methodische Verstärkung („Reinforcement“), – als „kognitives Werkzeug“ – die Ökonomie intellektueller Arbeit, insbesondere die Reorganisation. DGS unterstützen die Selbststeuerung des Lerners sowie konstruktivistische Erkenntnisprozesse, die, grob gesehen, in den Phasen: „Epistemischer Konflikt – Selbstreflektion – Selbstkorrektur“ ablaufen.

## 1 Aneignung geometrischer Begriffe und Sätze

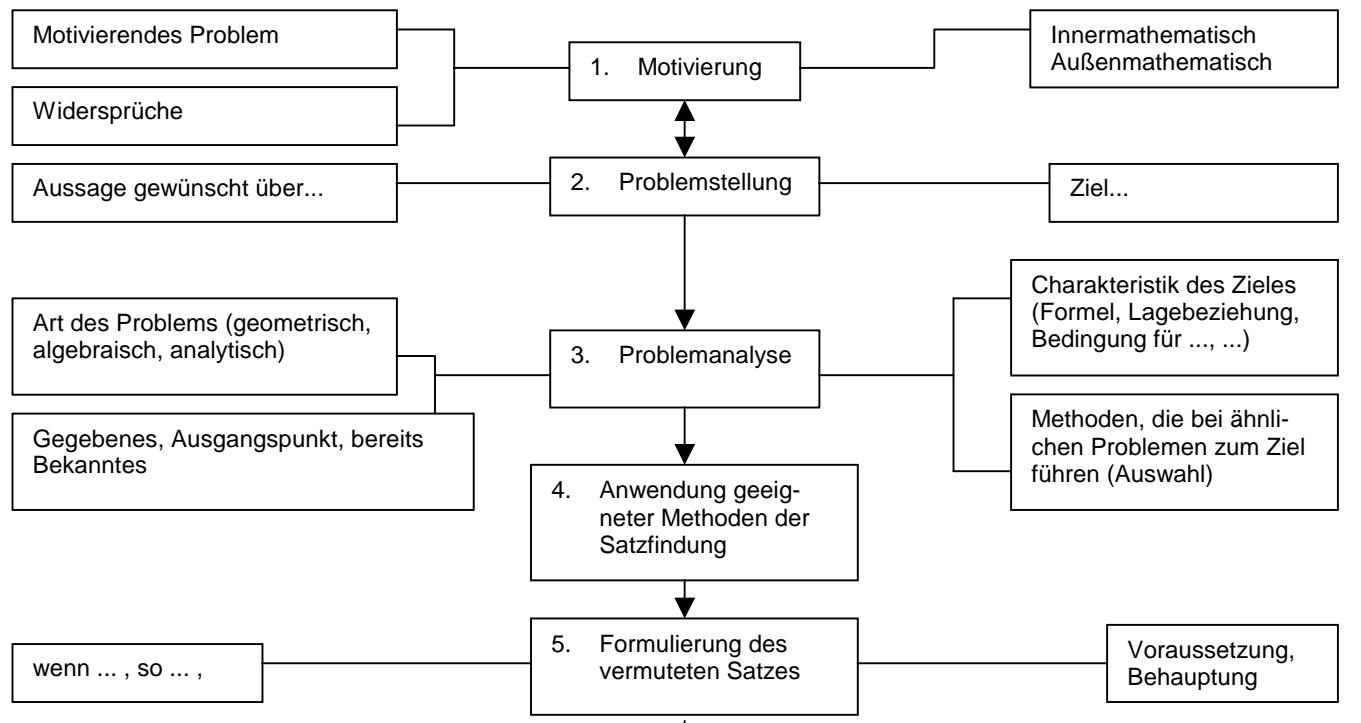
Die Anwendung des Zugmodus zur Variation von Figurenziehungen verbessert die induktive Basis für die Begriffsbildung sowie die Satzfindung und die Konkretisierung von an Figuren gebundenen Begriffen und Sätzen.

DGS können mehr oder weniger in allen Phasen des Gesamtprozesses der problemlösenden Satzbehandlung in der Geometrie eingesetzt werden (**Diagramm 1**).

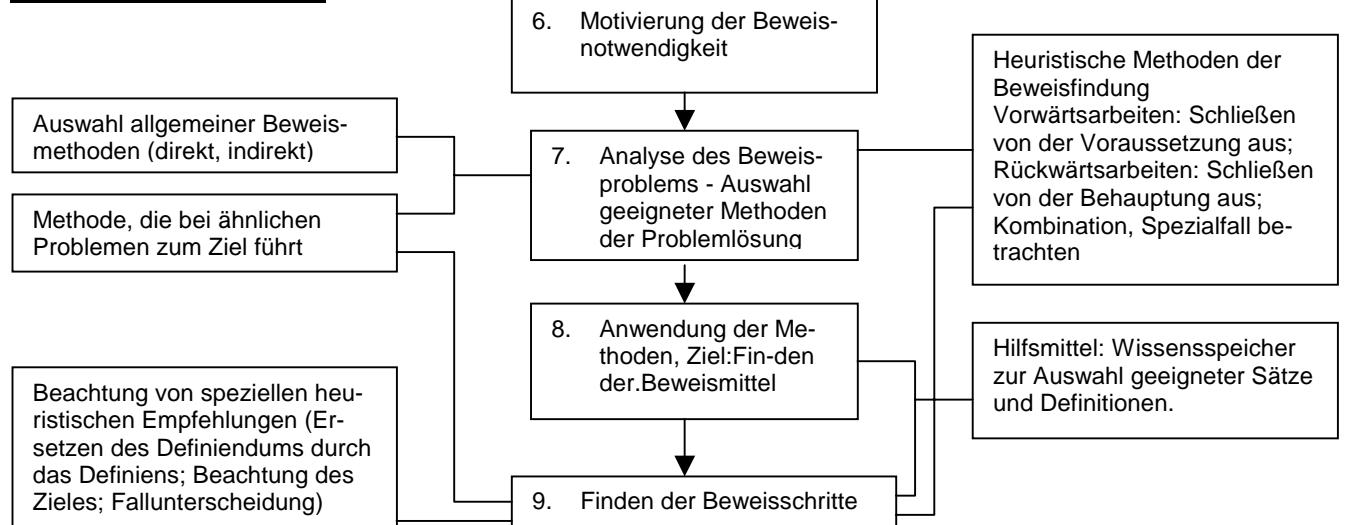
Durch das Bereitstellen der zu variierenden Konfiguration in Form „interaktiver Arbeitsblätter“ kann der Prozess der Erkenntnisfindung von der Erstellung der Konfiguration weitgehend abgekoppelt werden.

## Diagramm 1: Gesamtprozess der problemlösenden Satzbehandlung

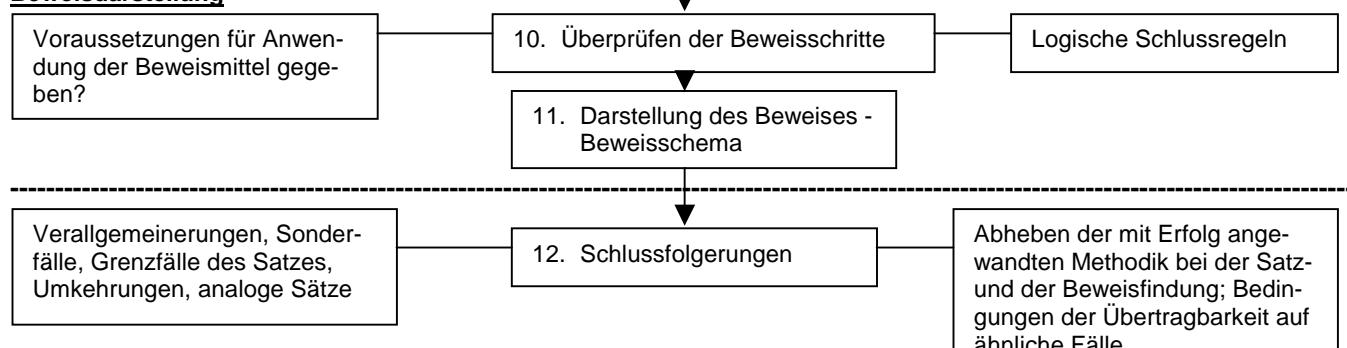
### Prozess der Satzfindung



### Prozess der Beweisfindung



### Beweisdarstellung



**Anmerkung:** U. a. wird das methodische Hilfsmittel "Wissensspeicher" (Arbeitsblatt mit einer kurzen Zusammenstellung bereits behandelter Sätze und Definitionen) verwendet.

**Konfiguratives Beweglichkeitsprinzip:** Beim Einsatz von DGS ist auf die induktive Satzfindung und Begriffsbildung mittels folgender Möglichkeiten des kontinuierlichen Variierens geometrischer Konfigurationen hingearbeitet werden (Konfiguratives Beweglichkeitsprinzip):

- Aus einer Konfiguration in großer Variationsbreite viele weitere isomorphe Konfigurationen (mit stetigen Übergängen, d.h. in Realzeitverarbeitung) erzeugen.
- Stetige Übergänge zwischen Sonderfällen derselben Konfiguration erzeugen.
- Aus einem allgemeinen Fall spezielle Fälle einer Konfiguration durch stetige Übergänge erzeugen.
- Aus einem speziellen Fall allgemeinere Fälle einer Konfiguration durch stetige Übergänge erzeugen.
- Grenzfälle einer Konfiguration durch stetige Übergänge erzeugen

**Realisierung des operativen Prinzips:** Die stetige Änderung von geometrischen Konfigurationen mittels geeigneter interaktiver Grafiksysteme ermöglicht eine wirklich operative Orientierung von Satzfindungsprozessen:

Welche Eigenschaften einer Konfiguration bleiben (nicht) invariant beim stetigen, individuell durchgeführten Änderungsvorgang?

Elementargeometrischen Sätze ergeben sich so als Invarianzaussagen bei stetigem Verändern von geometrischen Figuren.

Die Optionen der Eigenschaftsprüfung einer Figur unterstützen den Prozess der Satzfindung.

## 2 Das Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben

Konstruktionsmethode:

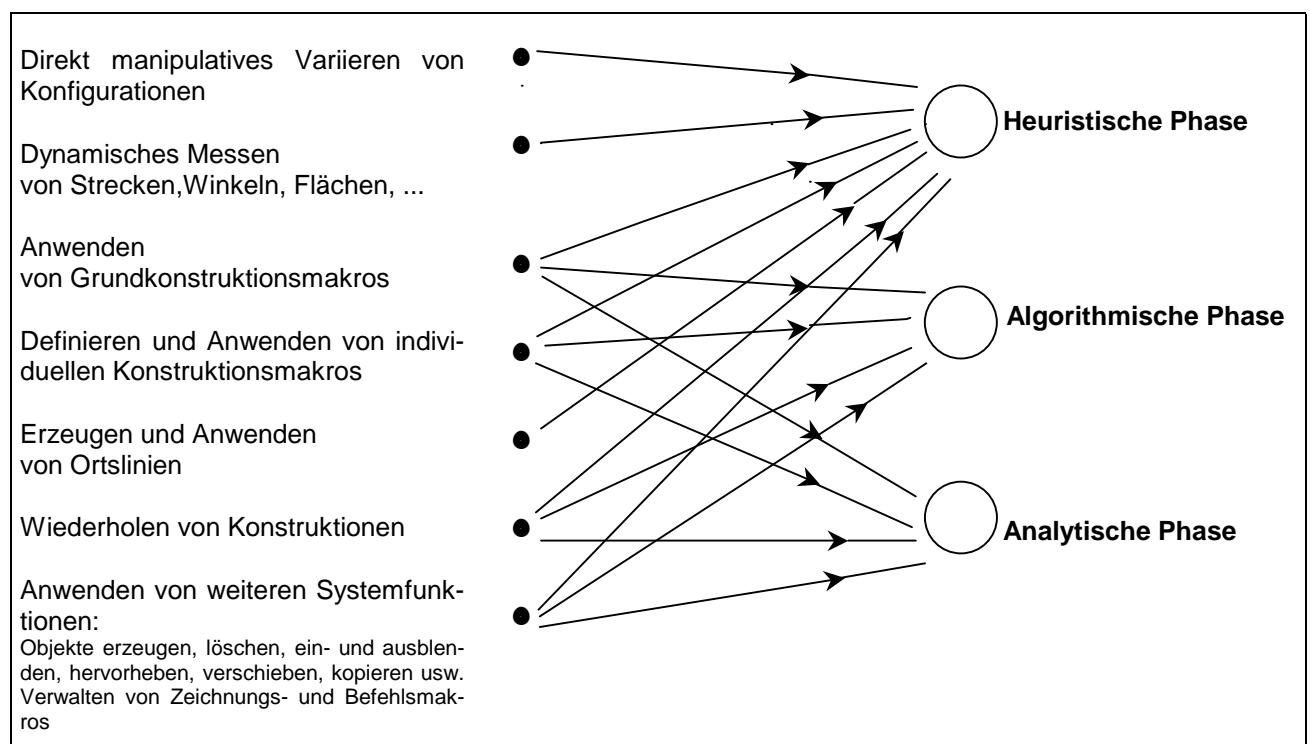
- (1) Konstruktion einer beweglichen Planfigur
- (2) Anpassung der Planfigur im Zugmodus an die gegebenen Daten
- (3) Finden einer konstruktiven Lösung mit heuristischen Methoden an der Planfigur

- (4) Simulation einer entsprechenden „Zirkel-Lineal-Konstruktion“ für die Lösung (die „großen“ Konstruktionsschritte entsprechen im Wesentlichen denen, die mit herkömmlichen Werkzeugen auszuführen sind)
- (5) Definition eines entsprechenden Konstruktionsmakros: Aus den gegebenen graphischen und/oder numerischen Anfangsobjekten werden direkt die Zielobjekte erzeugt.

Beschreibt man die Lösung einer geometrischen Konstruktionsaufgabe durch einen dreiphasigen Prozess:

- Heuristische Phase
- Algorithmische Phase
- Analytische Phase,

so werden die Phasen, insbesondere aber die heuristische Phase von DGS unterstützt (Diagramm2; ein Pfeil bedeutet: "...unterstützt...")



**Diagramm 2**

### 3 Das Lösen geometrischer Berechnungsaufgaben

#### Methode des experimentellen Berechnens:

- (1) Konstruktion einer entsprechenden „Berechnungsfigur“
- (2) Messung der in Frage kommenden Größen, auch von solchen, die mittels Termen zu berechnen sind, an der Berechnungsfigur
- (3) Variation der Figur, bis sie die gegebenen Größen näherungsweise annimmt und ablesen derselben.

#### Methode der Simulation händischen Berechnens:

Der händische Vorgang des Berechnens, etwa mit Taschenrechner-Hilfe, kann Schritt für Schritt im DGS simulativ ausgeführt werden.

#### Methode der Definition und Verwendung von Formelmakros:

Bildung eines Formelterms aus gegebenen Größen (auch aus figurenunabhängigen), die Anfangsobjekte eines Makros sind, das nach entsprechender Selektion von gegebenen Größen den Wert des Formelterms berechnet. Aus entsprechenden Formelmakros können neue Makros gebildet werden.

Zur Übersicht über Messwerte und berechnete Werte und zur Analyse derselben dient die Ausgabe in eine Tabelle.

Das experimentelle Lösen von geometrischen Berechnungsaufgaben dient als Vorstufe für das computernumerische und -algebraische Lösen spezieller und allgemeiner geometrischer Berechnungsaufgaben.

### 4 Behandlung der Abbildungsgeometrie

Folgende Möglichkeiten unterstützen die Untersuchung/Anwendung von Abbildungen sowie von Abbildungsgruppen und die Erzeugung von neuen Figuren aus gegebenen:

- Repräsentation einer Abbildung als ein Ganzes (Makros)
- Komposition von Abbildungen

- Dynamische Parametrisierung von Abbildungen
- Dynamische Variation der Originalfigur bei einer Abbildung.

## 5 Untersuchung und Anwendung von Relationen an geometrischen Figuren

Das Konzept referenzierbarer Ortskurven unterstützt die Exploration und Anwendung geometrischer Beziehungen bei der

- "Ortslinienmethode" in der heuristischen und konstruktiven Phase des Lösens einer Konstruktionsaufgabe
- experimentelle Verifikationen von Aussagen
- Untersuchung von Bildmengen bei Abbildungen
- Konstruktion und analytische Untersuchung algebraischer Kurven
- Untersuchung von Funktionen (einer Variablen) an geometrischen Figuren gemäß folgender Methode:
  - (1) Konstruktion einer geometrischen Figur bzw. Teilfigur unter der Bedingung, dass eine gewählte Größe (als Messwert oder Term aus Messwerten) von einer zu variierenden Größe abhängt;
  - (2) Darstellung des Funktionszusammenhangs zwischen unabhängiger Größe und von ihr abhängigen Größe als referenzierbares Schaubild einer Messfunktion;
  - (3) Interpretation des Schaubildes der Messfunktion (auch Beobachtung der Schaubild-Charakteristik bei Variation der Figurendimensionierung und Vergleich mit anderen Schaubildern);
  - (4) Herleitung der Gleichung für die Messfunktion, die im empirischen Schaubild dargestellt ist;
  - (5) Kontrolle der hergeleiteten Funktionsgleichung durch Erzeugung ihres Schaubildes (Kongruenz von Schaubild der Messfunktion und analytischem Schaubild);
  - (6) Diskussion der hergeleiteten Funktionsgleichung (besondere Stellen und Werte, wie z.B. Extremstellen und -werte).

## 6 Verbindung von synthetischer und analytischer Geometrie

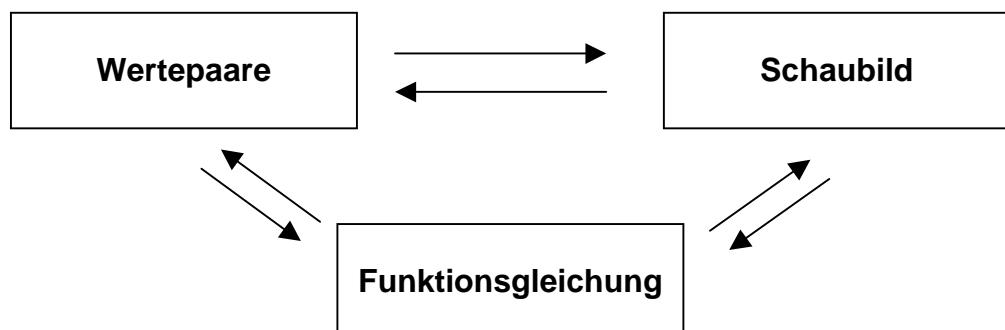
Die Einbettung synthetisch erzeugter und dargestellter Konfigurationen in ein Koordinatensystem eröffnet neue Möglichkeiten ihrer analytischen Beschreibung und Analyse.

## 7 Behandlung elementarer Funktionen

Behandlungsmöglichkeiten elementarer Funktionen einer Variablen:

- dynamische Generierung des Schaubildes
- dynamische Untersuchung mit Schaubildcursor
- dynamische Variation der aktuellen Funktionsparameter
- dynamische Manipulation des Schaubildes
- dynamische Komposition von Funktionen
- dynamische Bildung der Umkehrfunktion
- dynamische Modellierung mit Funktionsschaubildern

Der Übergang zwischen den Standardrepräsentationen von Funktionen kann dynamisch gestaltet werden (**Diagramm 3**).



**Diagramm 3**

Fragestellungen:

Wie wirkt sich die direkt manipulative Veränderung des Schaubildes auf die Funktionsgleichung/Wertpaare aus?

Wie wirkt sich die direkt manipulative Veränderung der Funktionsgleichung auf das Schaubild/Wertpaare aus?

Wie wirkt sich die direkt manipulative Veränderung von Wertpaaren auf das Schaubild/die Funktionsgleichung aus?

## 8 Modellierung und Simulation von Ausschnitten der Realität

Die (ebenen) kinematischen Anwendungen können modelliert und die entsprechenden Bewegungsvorgänge können simuliert werden.

## 9 Ästhetische Gestaltung von und mit geometrischen Figuren

Die Herstellung ästhetisch wirkender geometrischer Figuren wird durch entsprechende Optionen, wie sie auch in „Malprogrammen“ vorkommen, unterstützt.