Heinz Schumann

Präformale Extremwertbestimmung im gymnasialen Mathematikunterricht des 19. Jahrhunderts

Die im Lehrplan des preußischen Gymnasiums von 1810/1816 vorgesehenen „Anfangsgründe der Analysis“ wurden im Verlauf der Restauration zurückgenommen. Bis zum Ende des 19. Jahrhunderts entwickelten deshalb Mathematiklehrer präformale Methoden, um die „Lehre vom Maximum und Minimum“ mit ihren beliebten Aufgaben für den Unterricht zu retten. Unter diesen Methoden ist die von Schellbach hervorzuheben. Sie wird in diesem Beitrag durch eine computergrafische und computeralgebraische Behandlung aktualisiert.

Einleitung

Wir wollen eine Methode zur Extremwertbestimmung für Funktionen einer reellen Variablen "präformal" nennen, wenn sie nicht den Kalkül der Differentialrechnung oder nur implizit den Grenzwertbegriff verwendet. –Die Bezeichnung "elementar" ist in Bezug auf die Schulmathematik von FELIX KLEIN folgendermaßen relativiert worden:

"*Die einzige Definition der Elementarmathematik mit der die Schule etwas anfangen kann, ist eine praktische:* elementar sollen in allen verschiedenen Gebieten der Mathematik diejenigen Teile heißen, welche ohne lang fortgesetztes besonderes Studium für einen Knaben mittlerer Begabung zugänglich scheinen. *Der spezielle Bestand der so verstandenen Elementarmathematik verändert sich mit der Zeit:* es gilt das Gesetz der historischen Verschiebung, demzufolge Gebiete, die ursprünglich gewiß nicht elementar waren, allmählich durch verbesserte Darstellung elementar zugänglich werden (Max Simon). So ist es mit der Geometrie der Alten, so ist es längst auch, um auf den speziellen Gegenstand der gegenwärtigen Darlegungen zurückzukommen, mit den Anfängen der Differential- und Integralrechnung, soweit ich deren Einführung in den Schulunterricht befürworte." (1904, S. 9; Anmerkung: "Knaben" ist heute durch "Schüler und Schülerinnen" zu ersetzen.)

Die Differential- und Integralrechnung und die Behandlung der Extremwertaufgaben mittels Differentialrechnung fanden erst spät offizielle Aufnahme in die Lehrpläne der höheren Schulen Deutschlands (DAMNU 1922), obwohl bereits 1810/16 in den mathematischen Lehrplanentwurf für die Gymnasien Preußens die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung aufgenommen worden waren (vgl. SCHUBRING 1991, S. 44, 60, 256). Wie erklärt sich diese etwa 100jährige Verzögerung und der Bruch in der curricularen Entwicklung? Lassen wir einen der betroffenen preußischen Gymnasiallehrer zu Wort kommen (SPERLING 1831, S. 1):

Nach dem weisen Ermessen unseres hohen Ministeriums des Geistlichen Cultus wurde zur Vermeidung eines Uebermaaßes in den mathematischen Disciplinen auf den Gymnasien die billige Forderung in Erinnerung gebracht, daß unter andern Ueberschreitungen des Schulunterrichtes auch der Vortrag der Differential-Rechnung eingestellt werden sollte. Dadurch ist allerdings den Lehrern, welche sich daran erfreuten, esoterische Schüler gebildet zu haben, ein Theil ihres Vergnügens genommen, aber die Freude nicht ganz zerstört; weil vieles Einzelne, was z. B. der Taylorsche Lehrsatz in sich vereinigt, auch auf elementärem Wege erreicht und gefunden werden kann. Daß hierzu verschiedene Reihen-Entwickelungen gehören, brauche ich nicht zu erwähnen; wohl aber möchte es angenehm seyn, die Lehre vom Maximum und Minimum, eines der interessantesten Kapitel der Differential-Rechnung, ohne ihre Hülfe behandelt und so basirt zu sehen, daß diejenigen mathematischen Elemente, welche unsere gegenwärtige Schulbildung vorschriftsmäßig darreichen soll, schon zur Lösung sehr vieler Aufgaben über das Maximum und Minimum hinreichend wären. — Die Rettung dieses so mannigfaltigen und schönen Gegenstandes, wollte man ihn — wo er eigentlich auch hin gehört — der Lehre von den Funktionen einverleiben, oder seine Theorie auch nur, zum Behufe des Gebrauchs bei häuslichen Uebungsaufgaben, isolirt hinstellen, würde, wenn es gelänge ihn einleuchtend, sicher und unabhängig vom höhern Kalkül zu machen, auch denen gewiß nicht unangenehm seyn, welche sich bei ihrem Schulunterrichte keinen Uebertritt in das Gebiet der Analyse des Unendlichen erlaubt haben.

Die preußische Kultusbehörde hatte nach Klagen über die Überforderung der Schüler in einem Erlass (Rescript) des Jahres 1829 entsprechende Restriktionen vorgenommen (vgl. NEIGEBAUR 1835, S. 126 ff). Nach der im Lehrplan von 1810/16 realisierten Gleichgewichtung zwischen sog. wissenschaftlichen Fächern (einschließlich der Mathematik) und klassischen Sprachen, erfolgte binnen weniger Jahre u. a. durch den Einfluss der Altphilologen, das Fehlen eines verbindlichen Lehrplans, die inhomogene Qualifikation der Mathematiklehrer und die Nichtberücksichtigung des mathematischen Oberstufenwissens im Abitur eine zeitliche und damit inhaltliche Reduktion des Mathematikunterrichts. Dieser komplexe Prozess ist beschrieben in SCHUBRING (1991). Ein weiteres Eingehen auf die schulgeschichtliche Entwicklungsproblematik des Gymnasiums im 19. Jahrhundert würde den Rahmen dieses Beitrags sprengen. Es sei verwiesen auf die einschlägige Literatur: PAULSEN (1921), LUNDGREEN (1980), HERRLITZ (1993)

Was geschah nun mit der "Lehre vom Maximum und Minimum" und der Rettung dieses Unterrichtsgegenstandes, dessen aktuelle allgemeinbildende Bedeutung u.a. CLAUS (1993) herausgearbeitet hat? –Von ca. 1830 an bis zum Ende des 19. Jahrhunderts entwickelten Mathematiklehrer präformale Methoden zur Extremwertbestimmung, die SCHRÖTER 1904 in einem Überblick zusammengefasst und bewertet hat, - ein Beispiel für den aus der "Not" geborenen Erfindungsreichtum, der heute reichhaltigen Stoff für ein entsprechendes Unterrichtsprojekt abgeben könnte. Unter dem präformalen Methoden besticht die von SCHELLBACH[1] (1860) durch ihren einfachen und anschaulichen Ansatz.

Die Methode von SCHELLBACH in neuem Gewande

Wir wollen im folgenden die "SCHELLBACH-METHODE" durch Verwendung von Dynamischer Geometrie (CABRI Géomètre II) und Computeralgebra (DERIVE) aktualisieren und so der oberen Mittelstufe auf attraktive Weise zugänglich machen. Die Beschreibung der Methode von Schellbach entnehmen wir seinem Werk über "Mathematische Lehrstunden, Aufgaben aus der Lehre vom Größten und Kleinsten" (1860, S. 17/18, Kopie in Abb. 1). Wir schreiben f(x) für M(x) und (x+d) für x bzw. (x-d) für x_1 mit d>0 und setzen voraus, dass $x \to f(x)$ „hinreichend gutartig“ ist. In der Abbildung 2.1 veranschaulichen wir den Sachverhalt für ein relatives Minimum: Der Mittelpunkt MS der Sehne, die von der horizontalen Sekante durch die Punkte (x-d;f(x-d)), (x+d;f(x+d)) mit d>0 gebildet wird, läuft gegen den extremalen Punkt $(x_{min};f(x_{min}))$, wenn die Sekante gegen die Tangente läuft; im Grenzfall ist d = 0. Das wird durch eine Animation simuliert (Abb. 2.2, dieser dynamische Vorgang ist nur auf dem Bildschirm adäquat darstellbar). - Die SCHELLBACHSCHE METHODE für das Lösen von Extremwertaufgaben kann folgendermaßen formuliert werden (SCHUMANN 2000):

(1) Aufstellen der Zielfunktionen mit dem Funktionsterm f(x) (auch unter Berücksichtigung einer Nebenbedingung)
(2) Bilden der Gleichung f(x-d) – f(x+d) = 0
(3) Ausklammern von Potenzen von d und Nullsetzen des wesentlichen Faktors
(4) Gewinnen der Bestimmungsgleichung für x_m durch Nullsetzen von d
(5) Lösen der Bestimmungsgleichung
(6) Berechnen des Extremwertes durch Einsetzen von x_m in f(x) (Prüfung zulässiger Lösungen im Aufgabenkontext)

[1] Karl Heinrich Schellbach (1804 - 1892) kann als einer der führenden deutschen "Mathematikdidaktiker" in der Mitte des 19. Jahrhunderts angesehen werden. Er gründete das erste Institut zur Ausbildung gymnasialer Mathematik- u. Physiklehrer ("Schellbachsches Seminar", Berlin 1855). Mit seiner Denkschrift "Vorschläge zu einer Reform des mathematischen und physikalischen Unterrichts an unseren Gymnasien" (1860) gab er wesentliche Impulse für die Entwicklung des Mathematik- u. Physikunterrichts sowie der Mathematik- u. Physiklehrerausbildung. Als Autor vor allem methodisch-didaktischer Arbeiten u. Werke über Themen der Analysis und der Angewandten Mathematik nahm er Einfluss auf die Gestaltung des Mathematikunterrichts an Gymnasien und Realschulen. Als Mitherausgeber des "Crelleschen Journals" (ab 1855) und als Gesprächspartner berühmter zeitgenössischer Mathematiker förderte er die wissenschaftliche Kommunikation. (vgl. MÜLLER 1905)

Hat man hingegen bei einer graphischen Darstellung die Funktion in Gestalt einer Curve:

$$y = M(x),$$

so schneidet in der Nähe ihrer höchsten und niedrigsten Punkte eine zur x-Axe gezogene Parallele die Curve in zwei Punkten, welche um so mehr zusammenrücken, je mehr sich die Sehne den ersteren Punkten nähert, und schließlich, im Maximum oder Minimum selbst, zusammenfallen. Aus diesen Eigenschaften nun folgt unmittelbar die Methode, die wir zur Aufsuchung dieser ausgezeichneten Werthe einer Funktion anwenden müssen.

Ist nämlich x irgend ein Werth der unabhängig Veränderlichen, in der Nähe des dem Maximum entsprechenden, so giebt es nach den obigen Betrachtungen immer ein x_1, für welches

$$M(x) = M(x_1) \text{ oder}$$
$$M(x) - M(x_1) = 0.$$

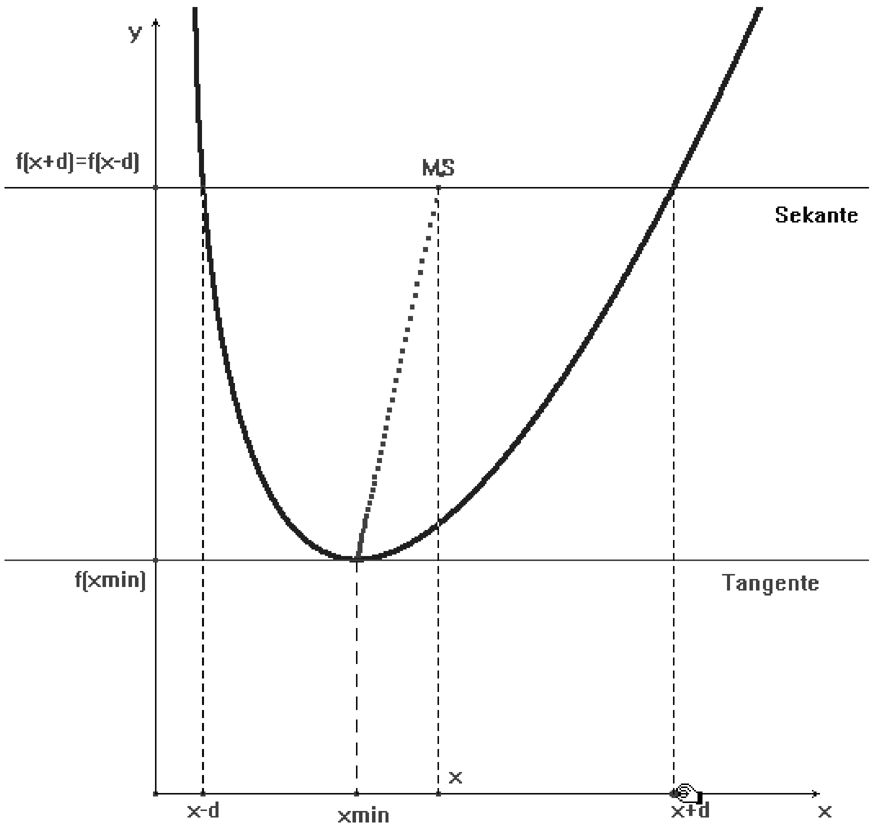
wird. Ordnet man diese Gleichung, indem man die entsprechenden Glieder mit x und x_1 zusammenstellt, so läßt sich aus jedem so erhaltenen Gliederpaare, das sich stets als Differenz derselben Ausdrücke mit x und x_1 darstellt, der Faktor $x - x_1$ absondern, wenigstens wenn man annimmt, daß derselbe unendlich klein sei, eine Annahme, die aber bei der willkürlichen Wahl von x immer erlaubt ist. Durch welche einfache Mittel übrigens man diese Absonderung ausführen kann, wenn die betrachteten Glieder Potenzen oder Wurzelgrößen oder trigonometrische Funktionen der unabhängig Veränderlichen enthalten, wird bei den einzelnen Aufgaben selbst gezeigt werden. Nachdem man ferner den Faktor $x - x_1$ oder eine Potenz desselben fortgehoben, setze man, um den dem Maximum oder Minimum entsprechenden Werth von x zu finden, $x = x_1$, eine Substitution die jetzt erst zu einem Resultate führt, weil sonst der in allen Gliedern enthaltene Faktor $x - x_1$ auf 0 reducirt wäre und wir folglich die identische Gleichung

$$0 = 0$$

erhalten hätten. Hat man indessen nach Fortheben von $x - x_1$, $x = x_1$ gesetzt, so erhält man eine Gleichung mit der einzigen Unbekannten x, aus welcher x zu berechnen ist. Der gefundene Werth von x ist dann die Abscisse des gesuchten Maximum oder Minimum, da das entsprechende $M(x)$ in der That die charakteristischen Eigenschaften jener ausgezeichneten Werthe besitzt.

(7) Berechnen weiterer gesuchter Größen.

Abb. 1


y
f(x+d)=f(x-d)
MS
Sekante
f(xmin)
Tangente
x
x-d
xmin
x+d
x

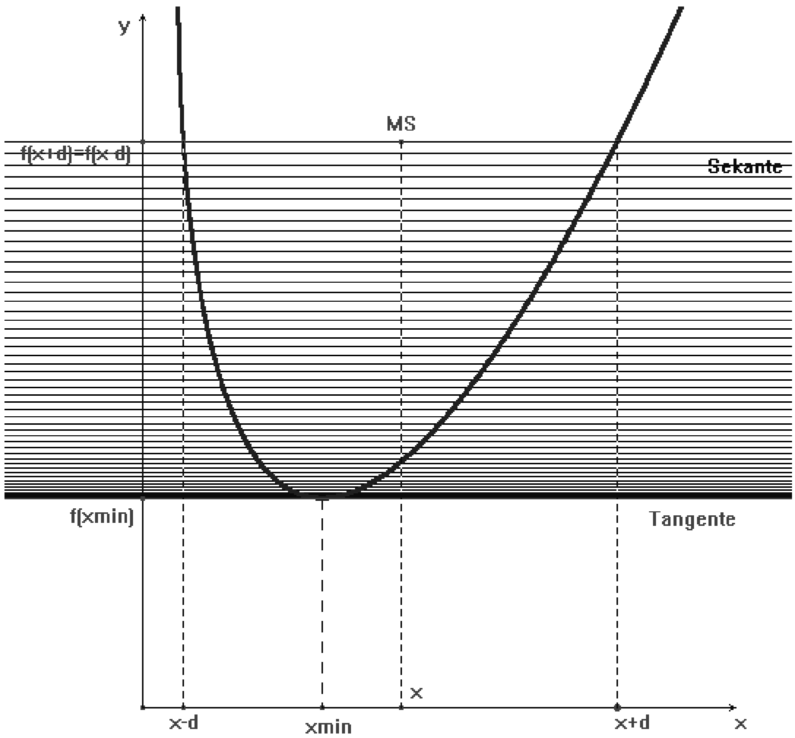

y
MS
f(x+d)=f(x-d)
Sekante
f(xmin)
Tangente
x
x-d
xmin
x+d
x

Abb. 2.1/2

(Anmerkung: Die Methode von Fermat (1629), die rechnerisch zu demselben Ergebnis führt, benutzt bei ihrem Ansatz $f(x+d) - f(x) \approx 0$, dass d hinreichend klein ist. Beim Ansatz von Schellbach benötigt man diese Voraussetzung nicht; außerdem steht das exakte "=".) Die Methode demonstrieren wir am Beispiel Nr. 20 des o.g. SCHELLBACHSCHEN Buches, das eine Vielzahl interessanter, auch anspruchsvollerer anwendungsorientierter Extremwertaufgaben enthält:

"Das Problem, das zweckmäßigste cylindrische Flüssigkeitsmaß zu finden, auf dessen Oberfläche so wenig als möglich von der zu messenden Flüssigkeit haften bleibt, wird leicht auf die rein geometrische Aufgabe zurückgeführt, einen Cylinder zu konstruiren, der ein gegebenes Volumen hat, und dessen Mantel und Grundkreis zusammengenommen ein Minimum werden."

Die Lösungsschritte arbeiten wir mit der Computeralgebrakomponente von DERIVE ab (vgl. Ausdruck).

Schellbach hat nicht erkannt, dass die Bestimmungsgleichung auch Lösungen für Wendepunkte mit horizontaler Tangente haben kann, wenn er schreibt:

"Da diese unsere Methode sich aber auf Eigenschaften gründet, welche den größten und kleinsten Werthen unterschiedlos zukommen, so können wir in ihr kein Mittel finden, welches uns unterscheiden lehrt, welche der gefundenen x einen Maximum und welche einen Minimum entsprechen. Die Entscheidung dieser Frage ist entweder aus der besondern Gestalt der gegebenen Funktion, oder aus dem besonderen Gegenstande der behandelten Aufgabe zu schöpfen, wie wir dies in den folgenden Untersuchungen durchführen werden." (SCHELLBACH, 1860, S. 18)

Mittels dynamischer Geometrie kann bei entsprechenden geometrischen Extremwertaufgaben die Prüfung auf Existenz eines Maximus bzw. Minimums auf experimentellem Wege durchgeführt werden. Wir genügen der Forderung nach der Erziehung zum funktionalen Denken (GUTZMER 1905, S. 544), indem wir funktionale Beziehungen an geometrischen Figuren untersuchen und extremale Eigenschaften entdecken (SCHUMANN 2000). In der Art eines interaktiven Arbeitsblattes (SCHUMANN 1998) bieten wir den Schülern/innen eine Versuchsanordnung für die Aufgabe Nr. 20, mit dem Ziel, die Messfunktion für die Oberfläche in Abhängigkeit von Grundkreisradius zu untersuchen (Abb. 3 für das Volumen 100 cm^3 mit bereits eingezeichnetem Schaubild als Ortskurve und mit näherungsweise eingestelltem Extremalpunkt). Durch Variation des Volumenwertes ergibt sich die Invarianz der "Schaubildcharakteristik" mit dem extremalen Punkt.

#1: "Minimierung Oberfläche Dose ohne Deckel"

#2: $O = \pi\cdot r^2 + 2\cdot\pi\cdot r\cdot h$

#3: "Volume der Dose"

#4: $V = \pi\cdot r^2\cdot h$

#5: "Auflösen nach h"

#6: $\left[h = \dfrac{V}{\pi\cdot r^2}\right]$

#7: "h ersetzen in Oberflächenformel"

#8: $O = \dfrac{2\cdot V}{r} + \pi\cdot r^2$

#9: "Termdefinition für O"

#10: $O(r) := \dfrac{2\cdot V}{r} + \pi\cdot r^2$

#11: "Differenz gleicher Funktionswerte"

#12: $O(r + d) - O(r - d) = 0$

#13: "Gleichung vereinfachen"

#14: $\dfrac{4\cdot V\cdot d}{(d + r)\cdot(d - r)} + 4\cdot\pi\cdot d\cdot r = 0$

#15: $\dfrac{4\cdot d\cdot(V - \pi\cdot r\cdot(r + d)\cdot(r - d))}{(r + d)\cdot(d - r)} = 0$

#16: $-V - \pi\cdot r\cdot(d + r)\cdot(d - r) = 0$

#17: "d gleich Null setzen"

#18: $-V - \pi\cdot r\cdot(0 + r)\cdot(0 - r) = 0$

#19: $\pi\cdot r^3 - V = 0$

#20: "Gleichung nach r auflösen"

#21: $rmin = \dfrac{V^{1/3}}{\pi^{1/3}}$

#22: "Minimale Oberfläche bestimmen"

#23: $O\left(\dfrac{V^{1/3}}{\pi^{1/3}}\right)$

#24: $3\cdot\pi^{1/3}\cdot V^{2/3}$

#25: $Omin = 3\cdot\pi^{1/3}\cdot V^{2/3}$

#26: "Höhe für minimale Oberfläche"

#27: $\dfrac{V^{1/3}}{\pi^{1/3}}$

#28: "Es ist rmin=hmin!"

#29: "Für V=100:"

#30: $rmin = \dfrac{100^{1/3}}{\pi^{1/3}}$

#31: "Näherungswert"

#32: $rmin = 3.1692$

#33: $30\cdot 10^{1/3}\cdot\pi^{1/3}$

#34: $Omin = 30\cdot 10^{1/3}\cdot\pi^{1/3}$

#35: "Näherungswert"

#36: $Omin = 94.661$

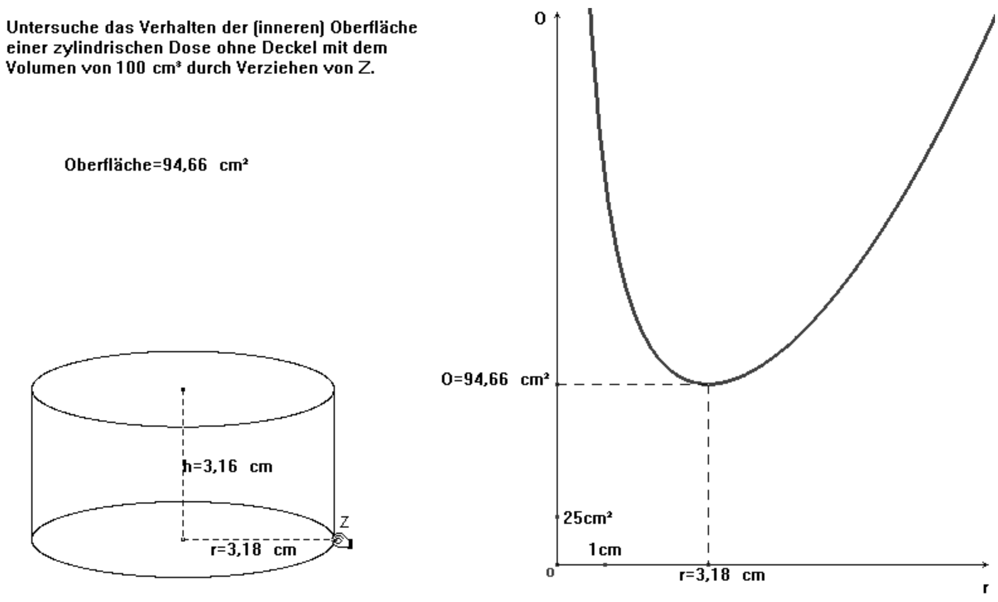


Abb. 3

Die experimentelle Methode zur Entdeckung und näherungsweisen Lösung von Extremwertaufgaben mittels dynamischer Geometrie besteht aus folgenden Arbeitsschritten:

(I) Konstruktion einer geometrischen Figur, die auch Nebenbedingungen erfüllt.

(II) Variationen einer unabhängigen Größe der Figur bzw. Teilfigur unter Beobachtung eines funktionalen Zusammenhangs: unabhängige Größe - abhängige Größen (Datensammlung in Wertetabelle; grafische Darstellung im Schaubild)

(III) Erkennen einer extremalen Eigenschaft (näherungsweises Bestimmen von Extremstelle und Extremwert)

(IV) Variation der Figurenparameter und Prüfung, ob extremale Eigenschaft invariant

(V) Formulierung einer geometrischen Extremwertaufgabe als (allgemeine) Berechnungsaufgabe.

Die (allgemeine) Berechnungsaufgabe kann nunmehr z.B. mit der Methode von Schellbach gelöst werden.

Schlussbemerkung: Neue Medien und Geschichte der Mathematik im Unterricht

Neben vorstehend exemplarisch gezeigten computergrafischen, -numerischen und -algebraischen Möglichkeiten der Behandlung eines mathematikgeschichtlich Unterrichtsgegenstandes ist es heute, dank der elektronischen Verwaltung von Literaturbeständen, für Lehrer/innen und Schreiber/innen einfacher bibliografische Informationen über mathematikhistorischen Quellenliteratur zu bekommen und auch diese einzusehen.

Das Internet als Informationsmedium für die Geschichte der Mathematik bietet auf über 100 000 englischsprachigen Web-Seiten (Suchbegriff "HISTORY OF MATHEMATICS", Stand: Januar 2001) Informationen unterschiedlicher Art für jedermann – entsprechende englische Sprachkenntnisse vorausgesetzt: Mathematikhistorische Texte mit beweglichen Grafiken (Applets), mathematikgeschichtliche Lexika-Einträge, Werbungen für mathematikgeschichtliche Literatur, Unterrichtsvorschläge für mathematikhistorische Themen, mathematikgeschichtliche Forschungsprojekte usw. Es stellt sich die Frage nach der (wissenschaftlichen) Qualität und Authentizität der Interneteinträge. Im Allgemeinen dürften wohl Lehrer/innen und Schüler/innen hinsichtlich der Informationsbewertung und der Orientierung im "Informationsdschungel" überfordert sein. –Auch neuere monografische Publikationen über Geschichte der Mathematik im Unterricht (z.B. KRONFELLNER 1998) haben die Problematik der Integration neuer Medien bei der Behandlung geschichtlicher Themen im Mathematikunterricht noch nicht aufgegriffen.

Literatur

CLAUS, H. J. (1993): Extremwertaufgaben und Bildungsziele. - In: KÖHLER, H. u. RÖTTEL, K.: Arbeitskreis Mathematik und Bildung. Mehr Allgemeinbildung im Mathematikunterricht. - Buxheim: POLYGON-VERLAG

DEUTSCHER AUSSCHUSS FÜR DEN MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT (DAMNU) (Hrsg.) (1922): Neue Lehrpläne für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht an den höheren Lehranstalten. Nach den Meraner Lehrplänen vom Jahre 1905 neu bearbeitet vom Deutschen Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (1922). Schriften des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, II. Folge, Heft 8, Leipzig 1922. Nachgedruckt in SIMON, M. (Hrsg.) (1980): Quellentexte zur Geschichte der Mathematikdidaktik II, Der Mathematikunterricht, (26) 6, S. 63 - 80

GUTZMER, A. (1905): Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten. - In: Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen (36), S. 543 - 553

HERRLITZ, H.-G. et al (1993): Deutsche Schulgeschichte von 1800 bis zur Gegenwart. Eine Einführung. - Weinheim: JUVENTA

KLEIN, F. (1904): Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen. Mit einem Abdruck verschiedener einschlägiger Ansätze von E. GÖTTING und F. KLEIN. – Berlin: TEUBNER

KRONFELLNER, M. (1998): Historische Aspekte zum Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse mit unterrichtsspezifischen Beispielen. - Wien: HÖLDER - PICHLER – TEMPSKY

KUTZLER, B. (1997): Einführung in Derive für Windows. Hagenberg: bk teachware

LABORDE, J.-M., BELLEMAIN, F. (1994-1996),: Cabri géomètre II. – Université Joseph Fourier. Grenoble, (Deutsche Bearbeitung von SCHUMANN, H.), Freising: Texas Instruments 1996

LUNDGREEN: P. (1980): Sozialgeschichte der deutschen Schule im Überblick,. Teil I: (1770 - 1918). - Göttingen: VANDENHOECK & RUPRECHT

MÜLLER, F. (1905): Karl SCHELLBACH, Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben, nebst zwei Schriften aus seinem Nachlaß und Briefen - Berlin: TEUBNER

NEIGEBAUR, J. F. (1935): Preußische Gymnasien und höhere Bürgerschulen. Eine Zusammenstellung der Verordnungen, welche den höheren Unterricht in diesen Anstalten umfassen. - Berlin: MITTLER

OSTWALD, W. (Hrsg.) (1934): PIERRE DE FERMATS Abhandlungen über Maxima und Minima (1629). Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Anmerkungen versehen von MAX MILLER. - Leipzig: AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT

PAULSEN, F. (1921): Geschichte des gelehrten Unterrichts auf den deutschen Schulen und Universitäten vom Ausgang des Mittelalters bis zur Gegenwart. Mit besonderer Rücksicht auf den klassischen Unterricht. - 3. erweiterte Auflage herausgegeben und in einem Anhang fortgesetzt von Rudolf LEHMANN. Zweiter Band. - Berlin: DE GRUYTER

SCHELLBACH, K. H. (1860): Mathematische Lehrstunden, Aufgaben aus der Lehre vom Größten und Kleinsten. Bearbeitet und herausgegeben von A. BODE und E. FISCHER. - Berlin: REIMER

SCHRÖTER, K. (1904): Die bekannteren allgemeinen Methoden zur elementaren Bestimmung der Maxima und Minima von Funktionen mit einer veränderlichen Größe. - In: Jahrbuch des Pädagogiums im KLOSTER UNSERER LIEBEN FRAUEN in Magdeburg / Neue Fortsetzung; 68

SCHUBRING, G. (1986): Bibliographie der Schulprogramme in Mathematik und Naturwissenschaften (wissenschaftliche Abhandlungen), 1800 - 1875. - Bad Salzdetfurth: FRANZBECKER

SCHUBRING, G. (Hrsg.) (1988): Quellen zur Geschichte des Mathematikunterrichts. - In: Der Mathematikunterricht, (34) 1

SCHUBRING, G. (1991): Die Entstehung des Mathematiklehrerberufs im 19. Jahrhundert. Studien und Materialien zum Prozeß der Professionalisierung in Preußen (1810-1870). 2., korrigierte und ergänzte Auflage. –Weinheim: DEUTSCHER STUDIENVERLAG

SCHUMANN, H. (1998): Interaktive Arbeitsblätter für das Geometrielernen, - In: Mathematik in der Schule, (36) 10, S. 562 - 569

SCHUMANN, H. (2000): Computerunterstützte Behandlung geometrischer Extremwertaufgaben. - Hildesheim: FRANZBECKER

SPERLING, J. G. A. (1831): Eine neue Methode das Maximum und Minimum zu finden. - In: Zu der öffentlichen Prüfung im hiesigen Königlichen Friedrichs- Gymnasium am 30sten September und 1sten Oktober d. J. (Schulprogramm). - Gumbinnen: MELTZER