

Computerunterstützte Behandlung analytisch-geometrischer Aufgaben im IE³

1 Einleitung

Erfahrungsgemäß haben viele Schüler und Schülerinnen der Sekundarstufe II Schwierigkeiten, sich die Aufgabenstellung, den Lösungsweg und die Lösung einer analytisch-geometrischen Aufgabe im IE³ räumlich vorzustellen. Geeignete menügesteuerte 3-D-Grafiksysteme, z. B. das DreiDGeo, können diesem Mangel abhelfen und zudem das in den Lehrplänen geforderte Üben der Fähigkeiten der räumlichen Visualisierung und des Erkennens räumlicher Beziehungen unterstützen. Wir gehen dabei von der „piktoralistischen These“ aus, dass die Vorstellung räumlicher Konfigurationen und deren Variation in Lage und Dimensionierung im „Schülerkopf“ erst aufgrund visuell wahrgenommener und beobachteter materialer oder bildhaft-anschaulicher Repräsentationen ausgebildet werden kann. Statische Wandtafelzeichnungen und auch handgefertigte Tageslichtprojektorfolien, oft von fragwürdiger räumlicher Wahrnehmungsqualität, sind keine Grundlage für die Entwicklung eines adäquaten raumgeometrischen Verständnisses bei der Bearbeitung der Aufgaben der räumlichen analytischen Geometrie – was natürlich nicht ausschließt, dass die Schüler und Schülerinnen auch ohne dieses Verständnis, quasi „raumgeometrisch blind“, solche Aufgaben algorithmisch lösen können.

Neben dieses Defizit, das herkömmliche Medien haben, tritt noch ein anderes: Im Allgemeinen sind die Aufgaben der analytischen Geometrie von spezieller Art, d. h. sie können wegen des Aufwandes an algebraischem Rechnen nur numerisch (mit „schönen“ Zahlen) gestellt werden. Die Computeralgebra- und Computernumerik-Komponenten entsprechender mathematischer Werkzeuge, wie z. B. die von DIVERE, gestatten, unabhängig von der Komplexität der Aufgabe, ihre allgemeine Lösung zu berechnen bzw. berechnen zu lassen. Dabei muss man systematisch und planend vorgehen. Die allgemeine Lösung kann dann mit den gegebenen Daten der speziellen Aufgaben spezifiziert werden. Man beherrscht so die Klasse aller entsprechenden Aufgaben, muss aber die Lösbarkeitsbedingungen für die allgemeine Aufgabe diskutieren, was endlich solche Aufgabenstellungen – über die bloße numerische Behandlung hinaus – mathematisch interessanter macht.

Eine Verbindung zwischen der computergrafischen und der computeralgebraischen Behandlung einer Aufgabe besteht nun darin, dass die computergrafische Lösung

einer Aufgabe auf der jeweils entsprechend spezifizierten allgemeinen algebraischen Lösung basiert, die unter der Oberfläche des Grafikwerkzeugs liegt.

Im folgenden erläutern wir exemplarisch die computergrafische und computer-algebraische Behandlung einer klassischen Aufgaben.

2 Computerunterstützte Behandlung

Wir gehen so vor: Zuerst wird die spezielle Aufgabe computergrafisch veranschaulicht und gelöst, danach erfolgt die computeralgebraische Behandlung der zugehörigen allgemeinen Aufgabe. Das Verständnis für die (begrifflich-abstrakte) allgemeine Aufgabe und ihre Lösung wird also bildhaft-anschaulich durch die computergrafische Behandlung der speziellen Aufgabe sichergestellt.

Aufgabe

Gegeben sind zwei Geraden g_1, g_2 .

$g_1: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{a}$ mit $\vec{p} = (-6, 6, 8)$, $\vec{a} = (2, 3, -3)$,

$g_2: \vec{y} = \vec{q} + \mu \cdot \vec{b}$ mit $\vec{q} = (-3, -8, 3)$, $\vec{b} = (5, -2, 3)$

und ein Punkt $R = (-4, -5, 9)$.

Gesucht sind die Gerade g , die zugleich durch g_1, g_2 und R geht, die Schnittpunkte von g mit g_1 und g_2 und die Winkel, unter denen g g_1 bzw. g_2 schneidet.

2.1 Computergrafische Behandlung

Wir skizzieren hier eine Behandlungsmethode, die auf dem Visualisierungs-, Konstruktions- und Messwerkzeug „DreiDGeo“ basiert:

- (1) Numerische Implementation der gegebenen Objekte einer speziellen Aufgabe zur Erzeugung ihrer grafischen Darstellung (Eingabe)
- (2) Experimentelle Untersuchung auf Existenz einer grafischen Lösung
- (3) Konstruktion von Hilfsobjekten aus den gegebenen Objekten in grafischer Darstellung zur Entwicklung einer Lösung (Lösungsstrategie)
- (4) Konstruktion der Lösungsobjekte in grafischer Darstellung aus den gegebenen Objekten bzw. Hilfsobjekten
- (5) Ablesen der gesuchten Objekte in numerischer Darstellung (Lösung)
- (6) Variation der Daten für die gegebenen Objekte (Operative Fragestellung: Wie hängt die Lösung von gegebenen Daten ab?).

Anmerkungen:

Bei den einzelnen Schritten findet eine ständige Visualisierung der grafischen Konfiguration, etwa durch Rotation der ihr umschriebenen virtuellen Kugel, und eine Verbesserung der Visualisierung durch z. B. Ein- bzw. Ausblenden von Objekten, Variation der Objekttransparenz, Zoomen, Gestaltung des dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems, ... statt.

Das Abspeichern der grafischen Lösungskonfiguration dient der Erweiterung des Aufgabenrepertoires; Ausdruck bzw. Export einer entsprechenden Grafikdatei werden zur Dokumentation verwendet.

Lösung der Aufgabe mit DreiDGeo

Wir geben mittels einer entsprechenden Maske (Abb. 1; unter „Eigenschaften“ kann die grafische Darstellung des Objekts auch farblich gestaltet werden) die Geraden g_1 , g_2 ein, danach den Punkt R . Diese Objekte werden automatisch in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem visualisiert (Abb. 2.1).

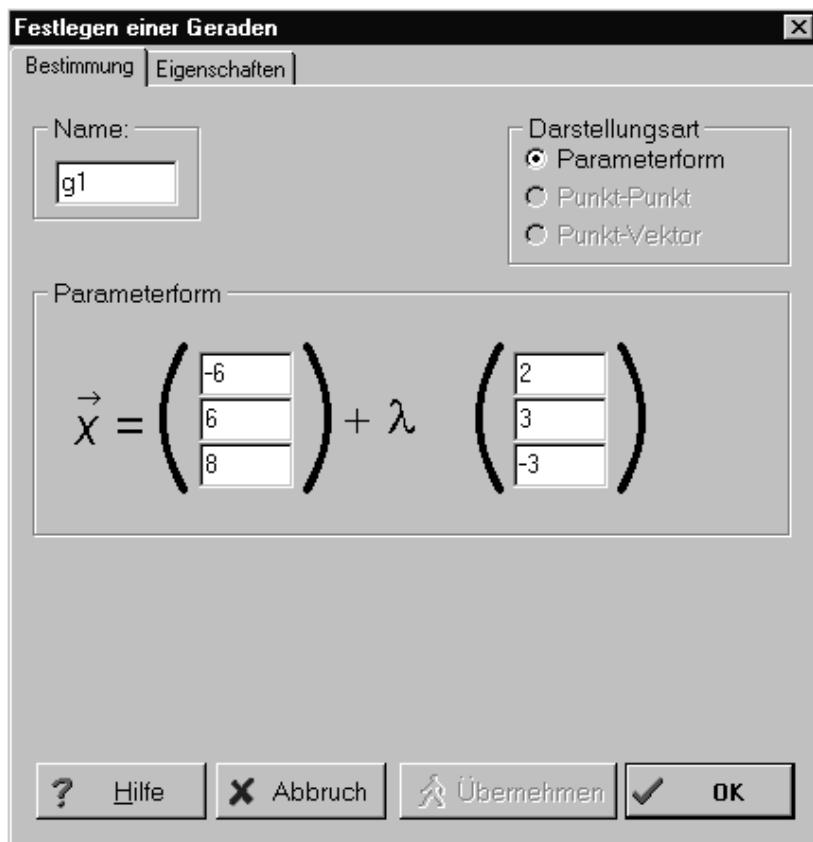


Abb. 1

Die Lage der windschiefen Geraden und des Punktes können wir uns durch Rotieren ansehen und auch die Art der Lage und Inzidenz durch das System bestätigen lassen. –Es gelingt uns auf experimentelle Weise zu erkennen, dass es eine Gerade g geben muss, die durch R geht und mit den beiden Geraden inzidiert, indem wir die

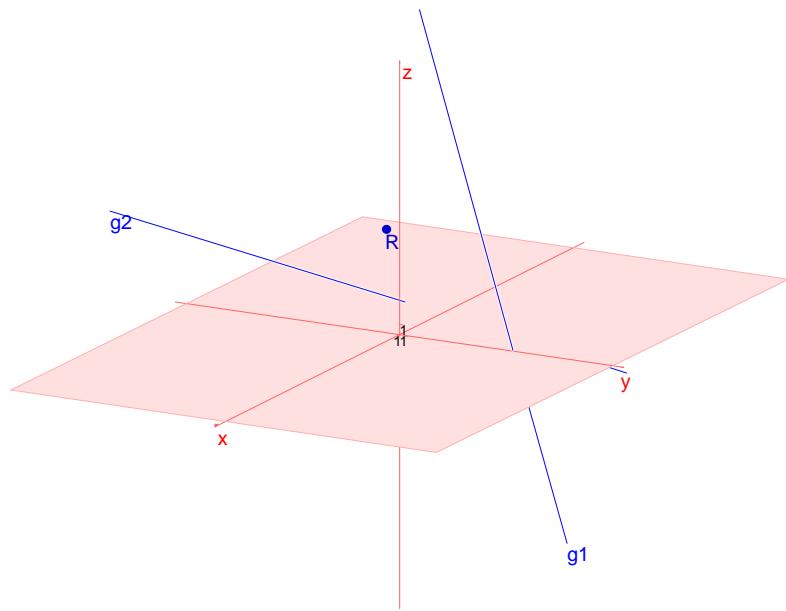


Abb. 2.1

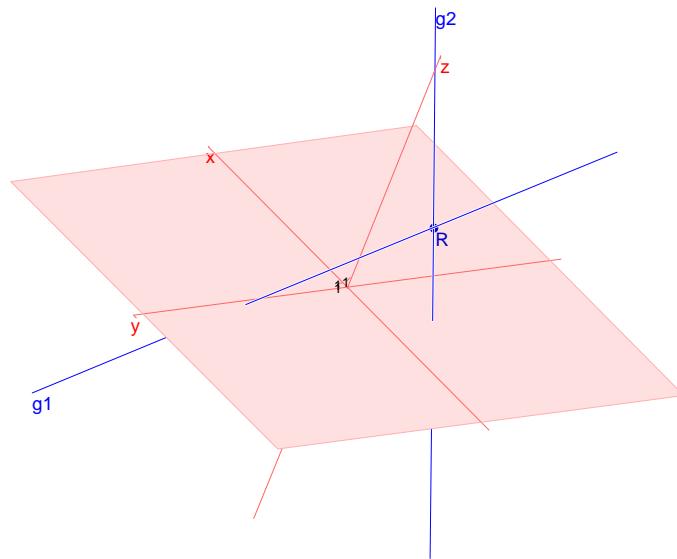


Abb. 2.2

Konfiguration so drehen, dass g als Normale der Bildschirmebene durch den Punkt R , der zugleich auf g_1 und g_2 zu liegen kommt, erscheinen würde (Abb. 2.2).

Als Hilfsobjekte generieren wir nun die Ebene e_1 durch R und g_1 sowie die Ebene e_2 durch R und g_2 , denn die gesuchte Gerade g muss in diesen Ebenen liegen, da sie durch R und g_1 bzw. durch R und g_2 gehen soll (Abb. 3.1). Diese Konfiguration schauen wir uns auch von „hinten“ an (Abb. 3.2).

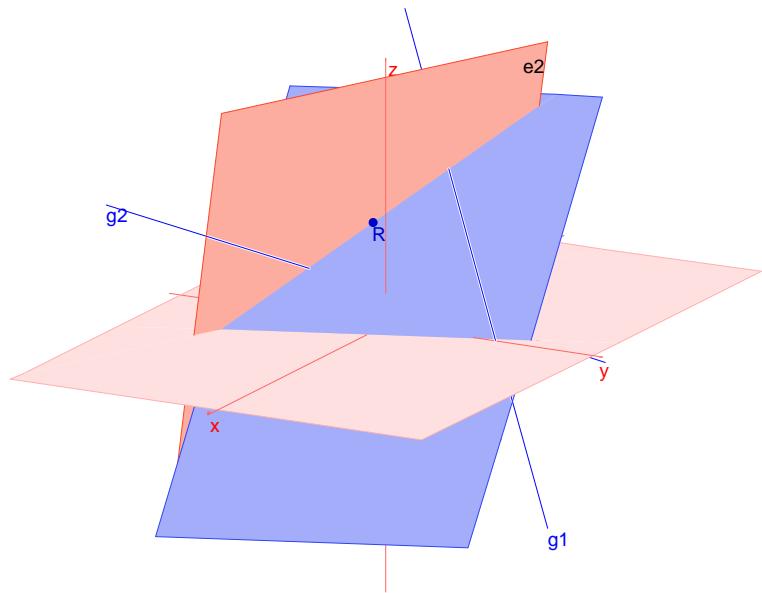


Abb. 3.1

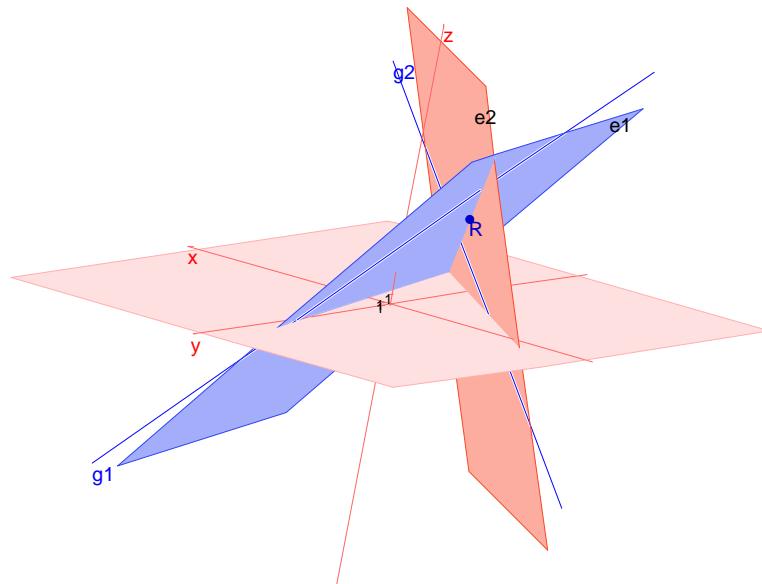


Abb. 3.2

g muss also die Schnittgerade der beiden Ebenen sein; diese wird aus e_1 und e_2 konstruiert (Ergebnis visualisiert in Abb. 4).

g lassen wir uns in Parameterform anzeigen; sie geht durch den Punkt $(-4, -5, 9)$ und hat den Richtungsvektor $(-3.08, 2.93, 2.36)$ oder exakt mit ganzzahligen Komponenten: $(-514, 489, 411)$. Entsprechend konstruieren wir die Schnittpunkte S_1 , S_2 (Ausgabe mit exakten Koordinaten beispielsweise von S_1 , in Abb. 5).

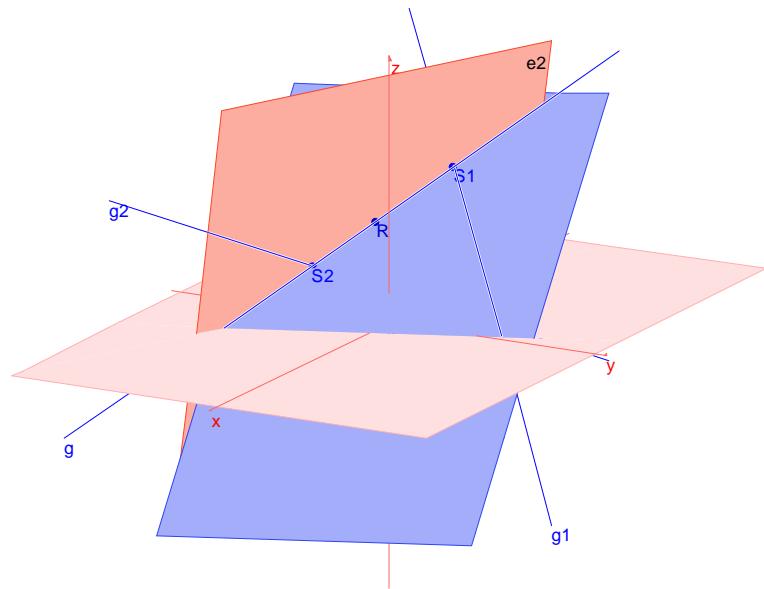


Abb. 4



Abb. 5

Schließlich lassen wir den Schnittwinkel zwischen g_1 und g (Ausgabe in Abb. 6) bzw. g, g_1 messen. – In Abbildung 6 ist auch das komfortabel handhabbare Register für die Verwaltung (Protokollierung, Selektion, Komposition und Ausgabe) der grafischen Objekte zu sehen, in dem u.a. die Sichtbarkeit der Objekte bzw. der Objektbezeichnungen in der Spalte „s“ bzw. „B“ ein- und ausgeschaltet werden kann.

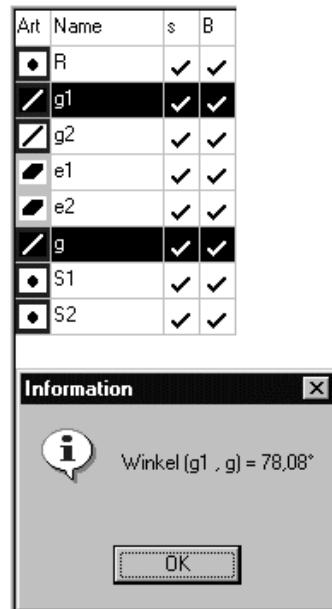


Abb. 6

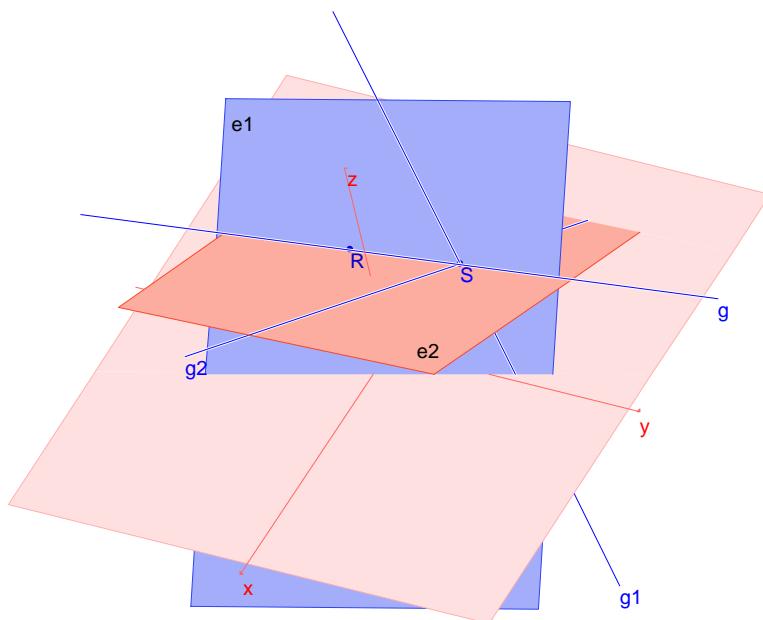


Abb. 7

–Wir verändern abschließend die Geraden g_1 , g_2 so, dass sie z.B. einander schneiden. Dann ist die Lösung der Aufgabe trivial: g ist die Verbindungsgerade des Schnittpunkts S mit R (Abb. 7). Konfigurationen für (verschiedene) parallele Geraden g_1 , g_2 : Falls R in der von g_1 und g_2 aufgespannten Ebene liegt, so gibt es unendlich viele Geraden g , andernfalls gibt es keine Lösung.

2.2 Computeralgebraische Behandlung

Wir beschreiben eine entsprechende Behandlungsmethode in DERIVE, die ähnlich mit anderen menügesteuerten Assistenzprogrammen, wie z.B. MATHCAD ausgeführt, und die generell auf Berechnungsaufgaben auch aus anderen Bereichen angewendet werden kann.

- (I) Lösung der allgemeinen Aufgabe
- (II) Spezifizierung der allgemeinen Aufgabe mit den gegebenen Daten einer speziellen Aufgabe
- (III) Diskussion der Lösbarkeitsbedingung(en).

Die Lösung für unsere Aufgabe ist dokumentiert in einem Ausdruck (Ausdruck 1.1/2) den wir folgendermaßen kommentieren: Die Zeilen 1 – 22 enthalten die allgemeine Lösung. (Die Vektoren, symbolisiert durch kleine lateinische Buchstaben, werden dabei als "Zeilenvektoren" in eckigen Klammern geschrieben; „CROSS“ steht für "Kreuzprodukt"; das Skalarprodukt wird mit einem "·", der Betrag mit „ABS“ gebildet.) Die Lösungsidee besteht in der Beschreibung der gesuchten Geraden g durch R und eines Richtungsvektors von g , den man als Kreuzprodukt $\bar{u} \times \bar{v}$ der Normalenvektoren \bar{u}, \bar{v} der Hilfsebenen e_1, e_2 , die in Zeile 10/11 mit der Punkt-Normalenform angesetzt werden, erhält.

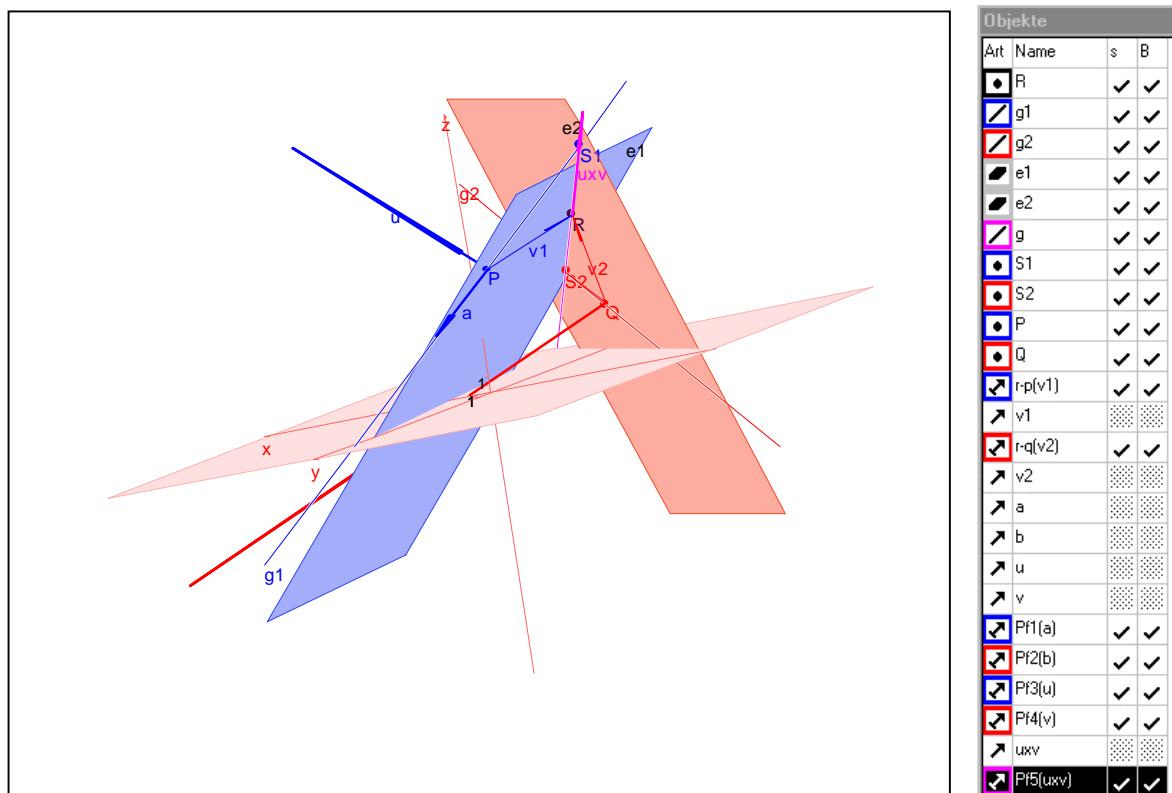


Abb. 8

Die Veranschaulichung bzw. die Entwicklung des algebraischen Lösungsweges kann in DreiDGeo durch Erweiterung der grafischen Lösungskonfiguration für die spezielle Aufgabe (Abb. 4) erfolgen (Abb. 8).

In Zeile 15 wird die Punkt-Richtungsform der Schnittgeraden aus den Normalenvektoren der beiden Hilfsebenen gebildet. Die Auflösung der Gleichungen in der Zeile 18 bzw. 19 nach λ bzw. μ mit der Löseautomatik, liefert die Schnittpunkte der gesuchten Geraden mit den gegebenen.

Die Einsetzung der allgemeinen Koordinaten und Komponenten aus den Zeilen 5,6 und 8 führt mittels "Vereinfachen" auf umfangreiche Terme für die Komponenten des Vektor \vec{s} , die Schnittpunktparameter λ, μ , von denen hier aus Platzgründen nur der für λ wiedergegebenen werden soll (Ausdruck 2), und die Schnittwinkel w_1 und w_2 . Bei Benutzung von Determinanten lassen sich solche Terme natürlich übersichtlicher darstellen. (Auf die Möglichkeit der Definition von Makros für Berechnungen gehen wir hier nicht ein.) Die Schnittwinkel zwischen den Geraden werden wie üblich mit dem Skalarprodukt und dem Arcuscosinus bestimmt, dabei sind die Winkelwerte nur eindeutig bis auf das 180° -Komplement bestimmt (Zeile 21/22).

```

#1: "Gesucht: Gerade, die durch zwei Geraden und einen Punkt geht"
#2: "Gleichungen der Geraden g1, g2"
#3: x := p + λ·a
#4: y := q + μ·b
#5: [p := [p1, p2, p3], a := [a1, a2, a3]]
#6: [q := [q1, q2, q3], b := [b1, b2, b3]]
#7: "Punkt R"
#8: r := [r1, r2, r3]
#9: "Ebene e1 durch R, g1 und e2 durch R, g2"
#10: (s - r)·u = 0
#11: (s - r)·v = 0
#12: "Normalenvektor der Ebene e1 bzw. e2"
#13: u := CROSS(r - p, a)
#14: v := CROSS(r - q, b)
#15: "Schnitt von e1 u. e2: Gleichung der gesuchten Geraden g"
#16: s = r + σ·CROSS(u, v)
#17: "Schnittpunktbestimmung von g mit g1 bzw. g mit g2"
#18: ((p + λ·a) - r)·v = 0
#19: ((q + μ·b) - r)·u = 0
#20: "Winkel zwischen g und g1 bzw. g2"
#21: w1 = ACOS( 
$$\frac{\text{CROSS}(u, v) \cdot a}{|\text{CROSS}(u, v)| \cdot |a|}$$
 )
#22: w2 = ACOS( 
$$\frac{\text{CROSS}(u, v) \cdot b}{|\text{CROSS}(u, v)| \cdot |b|}$$
 )

```

Ausdruck 1.1

Die Zeilen 24 – 41 enthalten die Lösung der speziellen Aufgabe, dabei werden in den Zeilen 24 – 26 die Zahlenwerte den entsprechenden Variablen zugewiesen. (Das hat

den Vorteil, dass durch Überschreiben dieser Werte quasi jede der speziellen Aufgaben gelöst werden kann). \vec{s} lautet in üblicher Schreibweise:

$\vec{s} = (-4, -5, 9) + 2\sigma(-514, 489, 411)$). Die gerundeten Winkelwerte sind approximiert; gegenüber der computergrafischen Lösung sind hier die 180° -Komplemente ausgegeben. Die Ergebnisse bestätigen die „computergrafische“ Lösung.

Insgesamt kommt man bei der allgemeinen bzw. speziellen Lösungsbestimmung in DERIVE mit den Optionen des "Vereinfachens", "Substituierens", "Lösens" und "Approximierens" aus.

Lösbarkeitsuntersuchung: Wenn der Schnittpunkte von g mit g_1 bzw. g_2 nicht existiert, d.h., wenn die Gleichung in Zeile 18 bzw. 19, umgeformt zu $(\vec{p} - \vec{r}) \cdot \vec{v} + \lambda \vec{a} \vec{v} = 0$ bzw. $(\vec{q} - \vec{r}) \cdot \vec{u} + \mu \vec{b} \vec{u} = 0$, keine Lösung hat, so hat die Aufgabe keine Lösung. Das ist der Fall für $\vec{a} \vec{v} = 0$ bzw. $\vec{b} \vec{u} = 0$, d.h., wenn der Richtungsvektor der Geraden g_1 bzw. g_2 parallel zu e_2 bzw. e_1 ist.

```

#23: "Daten und Ergebnis für eine spezielle Aufgabe"
#24: [p1:=-6, p2:=6, p3:=8, a1:=2, a2:=3, a3:=-3]
#25: [q1:=-3, q2:=-8, q3:=3, b1:=5, b2:=-2, b3:=3]
#26: [r1:=-4, r2:=-5, r3:=9]
#27: "Gesuchte Gerade g:"
#28: s=[-1028·σ-4, 978·σ-5, 822·σ+9]
#29: "Schnittpunkt von g1 mit g:"
#30:  $\lambda = \frac{167}{90}$ 
#31: [ $\lambda = -1.855$ ]
#32:  $\left[ -\frac{437}{45}, \frac{13}{30}, \frac{407}{30} \right]$ 
#33: [-9.711, 0.4333, 13.56]
#34: "Schnittpunkt von g2 mit g:"
#35:  $\mu = \frac{81}{109}$ 
#36: [ $\mu = 0.7431$ ]
#37:  $\left[ \frac{78}{109}, -\frac{1034}{109}, \frac{570}{109} \right]$ 
#38: [0.7155, -9.486, 5.229]
#39: "Winkel zwischen g und g1 bzw. g2:"
#40: w1=101.9
#41: w2=117.2

```

Ausdruck 1.2

$$\lambda = \frac{b_1 \cdot (p_2 \cdot (q_3 - r_3) + p_3 \cdot (r_2 - q_2) + q_2 \cdot r_3 - q_3 \cdot r_2) - b_2 \cdot (p_1 \cdot (q_3 - r_3) + p_3 \cdot (r_1 - q_1) + q_1 \cdot r_3 - q_3 \cdot r_1) + b_3 \cdot (p_1 \cdot (q_2 - r_2) + p_2 \cdot (r_1 - q_1) + q_1 \cdot r_2 - q_2 \cdot r_1)}{a_1 \cdot (b_2 \cdot (q_3 - r_3) + b_3 \cdot (r_2 - q_2)) - a_2 \cdot (b_1 \cdot (q_3 - r_3) + b_3 \cdot (r_1 - q_1)) + a_3 \cdot (b_1 \cdot (q_2 - r_2) + b_2 \cdot (r_1 - q_1))}$$

Ausdruck 2

Durch entsprechende Wahl von Werten für Koordinaten bzw. Komponenten können

diese Fälle auch computergrafisch in DreiDGeo illustriert werden.

2.3 Integration der händischen Behandlung

Neben den herkömmlichen händischen Standard für die Behandlung analytisch-geometrischer Aufgaben tritt nun ein neuer Standard, der durch die vorstehende Behandlung einer Aufgabe repräsentiert ist. - Es stellt sich die Frage nach der Beziehung dieser Standards zueinander, auch unter Berücksichtigung der noch fehlenden Möglichkeit der situativen Nutzung des Computers mit der entsprechenden Software durch die Schüler/Schülerinnen im Unterricht.

Mit einem Computer und einer Datenprojektionsmöglichkeit kann der Lehrer/die Lehrerin im Klassenzimmer wenigstens die spezielle Aufgabe mit ihrer Lösung computergrafisch veranschaulichen, nach dieser Veranschaulichung führen die Schüler/Schülerinnen die Lösung händisch aus, danach erarbeiten sie händisch den Ansatz der allgemeinen Aufgabe, der Lehrer/die Lehrerin demonstriert die computeralgebraische Lösung und ihre Spezifikation. –Und vielleicht ist der Computerraum einmal frei, und es gibt genug Rechner, damit die Schüler und Schülerinnen zu Zweit selbst mit DreiDGeo arbeiten können – falls überhaupt die Unterrichtszeit dafür reicht. In einem Leistungskurs mit entsprechender Themenstellung bieten sich vielleicht bessere Einsatzmöglichkeiten. –Aber, was nützt ein derartiger computerisierter Mathematikunterricht, wenn die gewöhnliche Reifeprüfung nicht adäquate Möglichkeiten bietet, die erworbenen Kompetenzen für das Lösen von mathematischen Problemen mittels geeigneter Computerwerkzeuge unter Beweis zu stellen?

3 Schlussbemerkungen

Bemerkung 1: Das Werkzeug DreiDGeo ist kein Dynamisches Geometriesystem, denn wir können u.a. die grafischen Grundobjekte weder direkt erzeugen noch die erzeugten direkt manipulieren, abgesehen von der Rotation einer Konfiguration. Solche prototypische Systeme, die auch für die analytische Geometrie des IE^3 genutzt werden können, sind bis jetzt nur für Macintosh (3D-Geometer, Klemenz 1994/99) fertiggestellt worden – mit dem Mangel der eindeutigen Wahrnehmbarkeit räumlicher Objekte in der Tiefe. Der vom 3D-Geometer abgeleitete, plattformunabhängige MiniGeometer (unter <http://geosoft.ch>), ein Java-Applet für interaktives Konstruieren im Raum, enthält keine Verbesserung des genannten Problems, außerdem besitzt er eine recht komplexe Benutzeroberfläche; eine hoffnungsvolle Entwicklung, das *Cabri-Géomètre-3D*, ist noch nicht abgeschlossen.

Bemerkung 2: Die Verwendung menügesteuerter Computerwerkzeuge, wie z.B. DreiDGeo und DERIVE, ist der Verwendung entsprechender kommandogetriebener Systeme vorzuziehen, denn die Beherrschung einer relativen Vielzahl von Kommandos mit ihrer Syntax stellt erfahrungsgemäß für die temporären Benutzer ein mnemotechnisches Problem dar, dass sich stärker zwischen diese und die zu

lösende Aufgabe stellt als die Beherrschung von Optionen eines auf Dialog angelegten menügesteuerten Werkzeugs. U.E. ist der Einsatz von kommandogetriebenen Systemen eher ein Hindernis für die Integration des „Computers“ in den Mathematikunterricht, auch den in der Sekundarstufe II.

Bemerkung 3: Wenn schon die Schüler/Schülerinnen bei der derzeitigen fehlenden Integration des Computer in das Curriculum nicht das freie Explorieren und Lösen von Aufgaben mit den Computerwerkzeugen, nach angemessener Einführung in diese, erfahren können, so hätte zumindest der Lehrer/Lehrerin die Möglichkeit solche Werkzeuge zur Generierung und Gestaltung von Aufgaben zu nutzen.

Bemerkung 4: Um die durch Computerwerkzeuge hervorgerufene Methodenvielfalt zur Geltung zu bringen, müssten die betreffenden Werkzeuge mehr oder weniger gut beherrscht werden. Einerseits kann das gegenwärtige Curriculum diese Voraussetzung schon zeitlich nicht leisten und andererseits kann das Erlernen verschiedener Benutzeroberflächen den Schülern nicht zugemutet werden. So ist leider in DERIVE die Visualisierung von 3D-Aufgaben der analytischen Geometrie nicht ohne weiteres möglich; man kann somit auf Werkzeuge wie DreiDGeo nicht verzichten. – Es mangelt also sowohl an einer besseren Integration der Computernutzung in den Mathematikunterricht als auch an der Entwicklung eines geeigneten modularen, multifunktionalen und adaptiven Computerwerkzeugs für den Mathematikunterricht, dessen Benutzungskompetenz in einem langfristigen Lernprozess an den auf die Klassenstufen bezogenen mathematischen Themen wachsend angeeignet werden kann.

Bemerkung 5: Wenn wir aber nach wie vor der Überzeugung sind, dass die Hauptaufgabe der analytischen Geometrie, nämlich die algebraische Beschreibung geometrischer Objekte und das algebraische Lösen von (algebraisierbaren) geometrischen Problemen, allgemeinbildenden Charakter hat, so müssen wir Sorge dafür tragen, dass diese Hauptaufgabe gleichermaßen für Schüler und Lehrer attraktiver und ihre Lösung zugänglicher wird. – Es ist zu hoffen, dass die vorstehend ausgeführte computerunterstützte Behandlung von analytisch-geometrischen Aufgaben des IE³ das Lernen und Lehren in diesem Gegenstandsbereich verbessern helfen kann.

4 Literatur

- Grottemeyer, K.P. (1964): Analytische Geometrie. 3.Aufl. – Berlin: De Gruyter
- Klemenz, H. (1994–1999): 3D-Geometer (Software mit Manual für Macintosh).
Kantonsschule Wetzikon
- Kutzler, B. (1997): Einführung in DERIVE für Windows. Hagenberg: bk teachware
- Quasem, S.; Laborde, J.-M. (1996): La représentation dans un micromonde de la géométrie dans l'espace: Le cas de Cabri-3D (Arbeitspapier des Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier; Grenoble)
- Rechenberger, K. et al (2000): DreiDGeo – ein multifunktionales Windows-Programm zur 3D-Darstellung von Objekten der analytischen Geometrie. – Augsburg: Zentralstelle für Computer im Unterricht
- Schumann, H. (2001): Raumgeometrie – Unterricht mit Computerwerkzeugen. – Berlin: Cornelsen