# Entdeckung von Analogien mit Cabri 3D am Beispiel "Dreieck – Tetraeder"

Nicht alles ist analog.

Erschienen in: math. did. 27 (2004) Bd. 1, 82-100 (Wiedergabe hier auszugsweise, insbesondere nur die Abbildungen)

**Zusammenfassung:** Das Konstruieren im virtuellen Raum mit Cabri 3D eröffnet neue Behandlungsmöglichkeiten klassischer raumgeometrischer Themen. In diesem Beitrag über das Analogisieren der besonderen Linien und Punkte des Dreiecks zu entsprechenden Objekten des Tetraeders wird gezeigt, wie das Entdecken der Analogien durch die Nutzung des dynamischen Raumgeometrie-Systems unterstützt werden kann und diese für die Schüler und Schülerinnen eigentlich erst zugänglich gemacht werden können.

**Summary:** Geometric constructions in the virtual space with Cabri 3 D open up new possibilities to treat classic spatial geometric topics. This contribution about the analogical processing of specific lines and points of the triangle to corresponding objects of the tetrahedron shows how to support the discovery of analogies with the dynamic 3D-system and how to make them really accessible for the students.

#### 1. Einleitung

Inhaltlich gliedern wir den Beitrag in der Reihenfolge der Analogiebildung:

- Mittelsenkrechten und ihr Schnittpunkt
- Winkelhalbierenden und ihr Schnittpunkt
- Seitenhalbierenden (Schwerlinien) und ihr Schnittpunkt
- Höhen und ihr Schnittpunkt.

Als Unterrichtsmethode eignet sich die Methode des durch den Lehrer/die Lehrerin gelenkten Entdeckens mittels geometrischem Konstruieren. Diese Methode wird auf unsere Thematik erst mit den konstruktiven Optionen von Cabri 3D anwendbar. Eine Einführung in die Nutzung dieser Optionen für Schüler/Schülerinnen ist notwendig. Auf die teilweise analytischen bzw. vektoriellen Beweise und ihre mögliche Visualisierung wird in unserem vorwiegend phänomenologischen Zugang aus Platzgründen nicht eingegangen; diese befinden sich weitgehend in der angegebenen Literatur bzw. in der dort zitierten.

### 2. Analogisierendes Entdecken mittels Konstruktion

Die Beschreibung des folgenden Analogisierungsprozesses mittels raumgeometrischem Konstruieren ist in der Art eines Entdeckungsprotokolls abgefasst.

Allerdings ist für die Erfassung der Dynamik des experimentellen und konstruktiven Arbeitens im virtuellen Anschauungsraum das Printmedium nur bedingt geeignet.

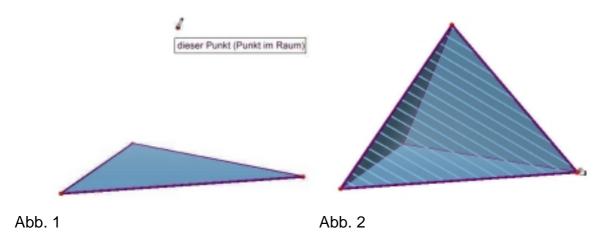
Um die Anzahl der Abbildungen zu reduzieren, wurde auf alle Abbildungen verzichtet, die verschiedene Ansichten derselben Konfiguration zum Zwecke der Visualisierung zeigen oder die durch Verziehen variierte Konfigurationen zum Zwecke einer Eigenschaftsinvarianz-Untersuchung dokumentieren.

Bei der Analogisierung von Punkten, Geraden und Strecken als Polygonseiten ist grundsätzlich zu beachten, dass

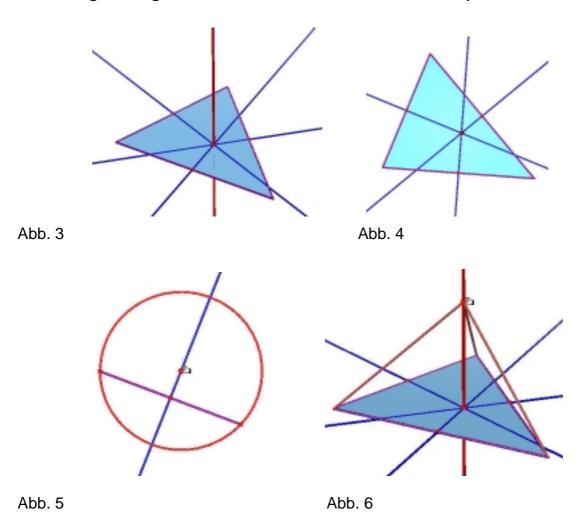
- Punkte in Punkte bzw. in (besondere) Geraden,
- Geraden in Geraden bzw. in (besondere) Ebenen,
- Polygonseiten in entsprechende Polyederkanten bzw. in Seitenflächen von Polyedern

übergehen können, dabei bleiben im Allgemeinen die relationalen Begriffe wie "inzidieren", "orthogonal", "parallel" erhalten.

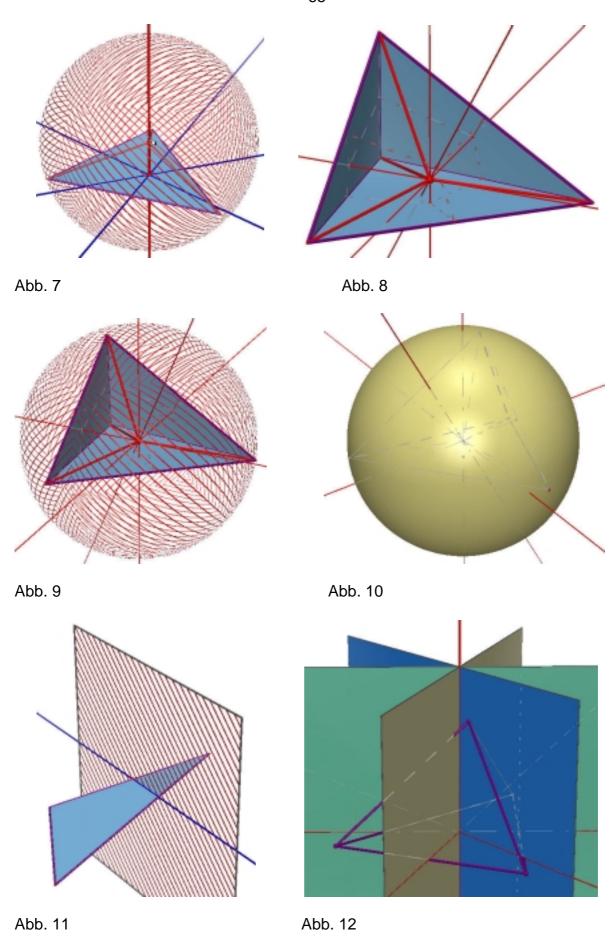
# 1.1 Analogisierung des Dreiecks



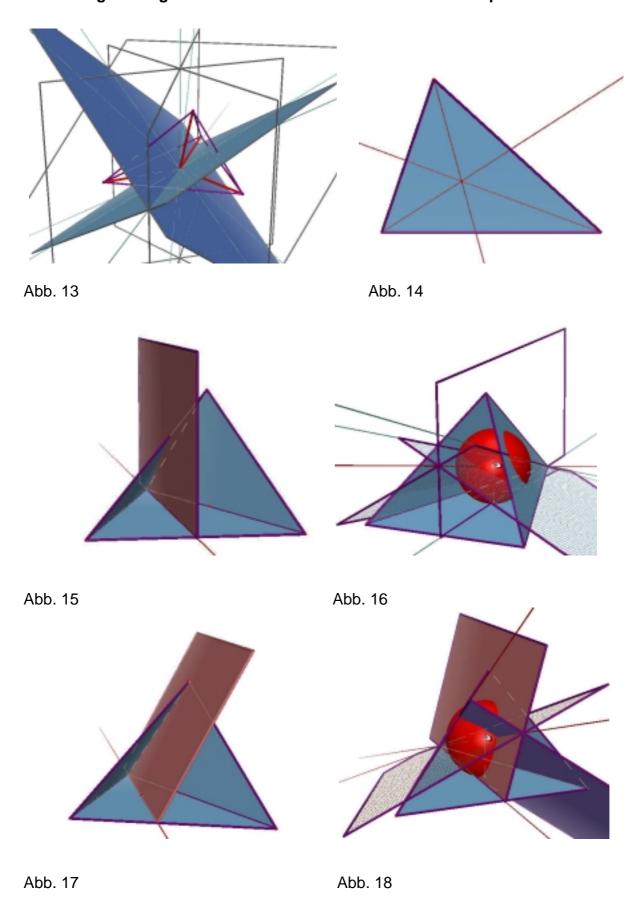
## 2.2 Analogisierung der Mittelsenkrechten und ihres Schnittpunkts



Entdeckung von Analogien mit Cabri 3D © 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten



# 2.3 Analogisierung der Winkelhalbierenden und ihres Schnittpunkts



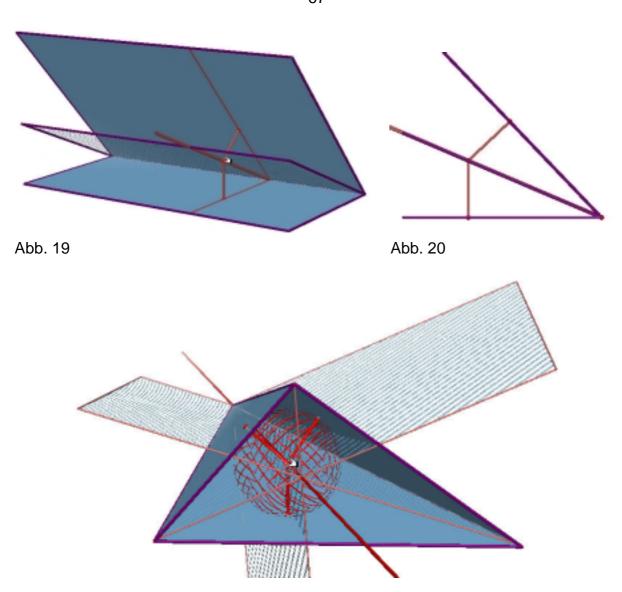


Abb. 21

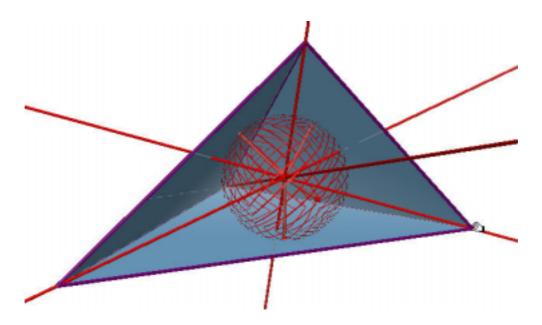


Abb. 22

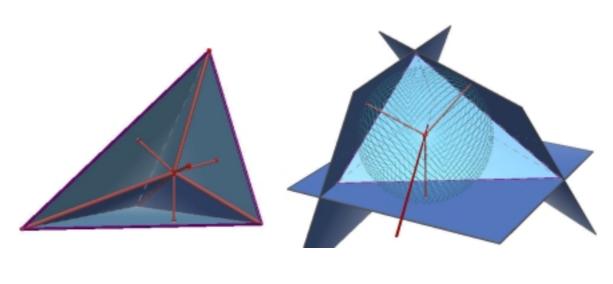


Abb. 23 Abb. 24

# 2.4 Analogisierung der Schwerlinien (Seitenhalbierenden) und ihres Schnittpunkts

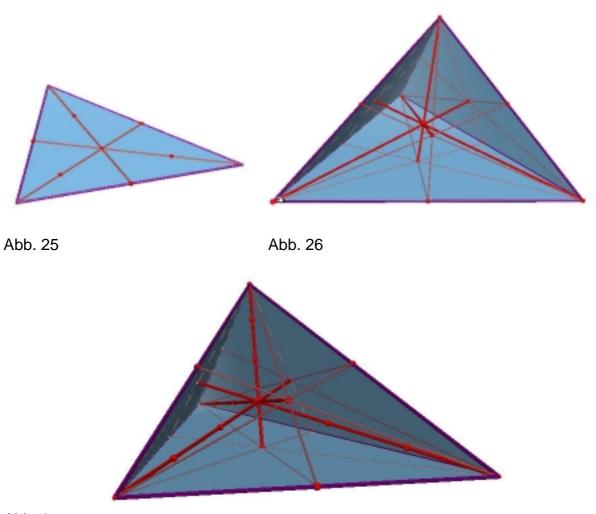
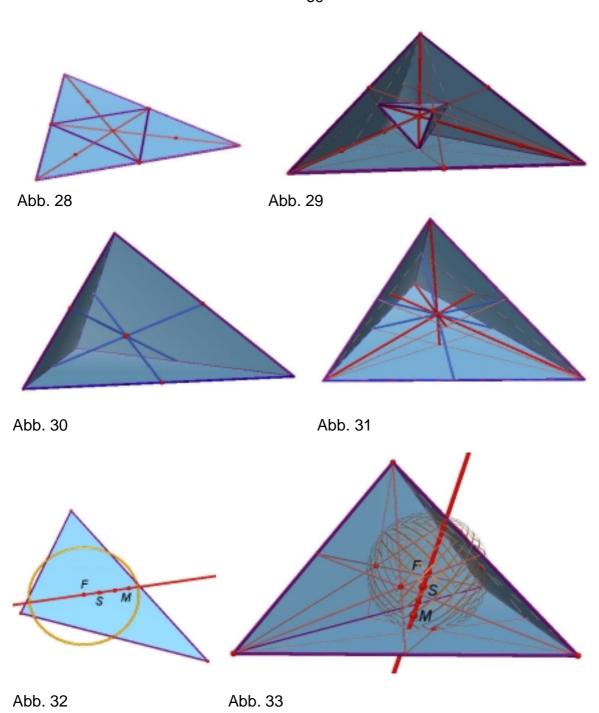


Abb. 27



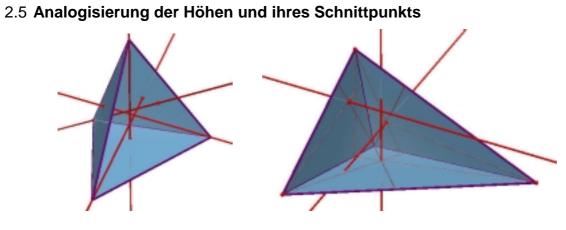


Abb. 34 Abb. 35

Entdeckung von Analogien mit Cabri 3D © 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten

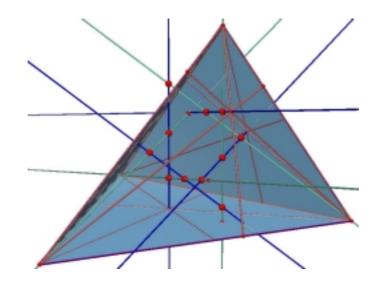


Abb. 36

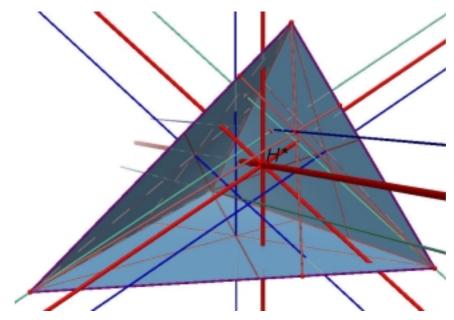


Abb. 37

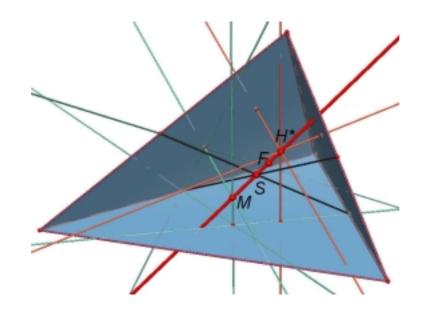
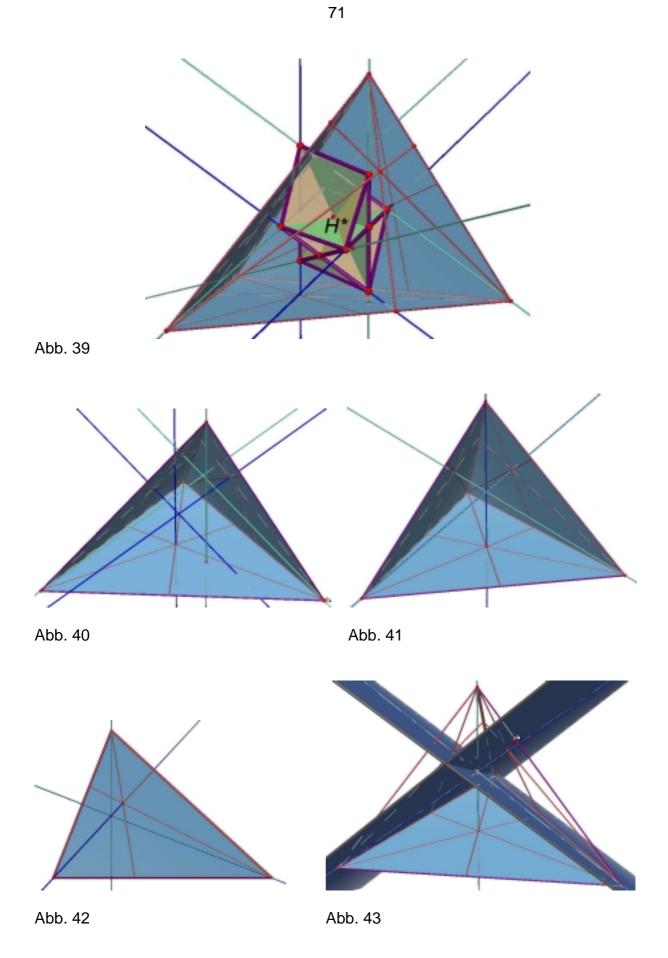
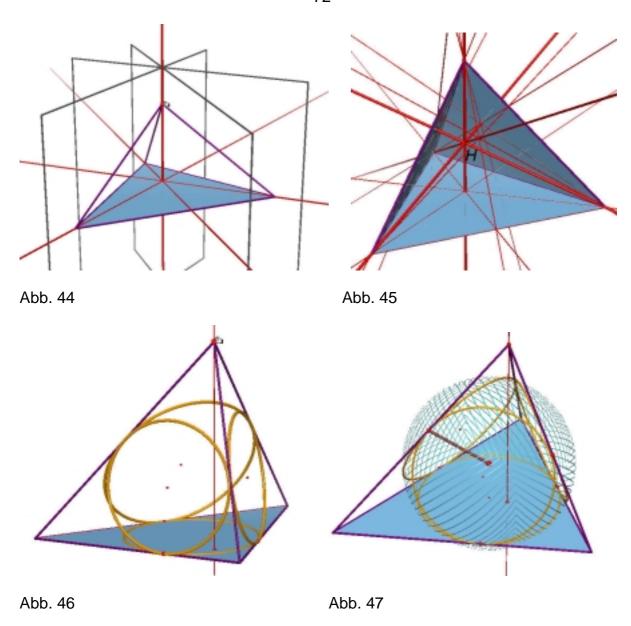


Abb. 38

Entdeckung von Analogien mit Cabri 3D © 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten





#### 3. Ausblick

- Analogisierung weiterer Linien und Punkte des Dreiecks: Welche der zahlreichen besonderen Linien (Kreise eingeschlossen) und Punkte im Dreieck (vgl. u. a. Donath 1976) haben ein Analogon in beliebigen bzw. in besonderen Tetraedern?
- Formenkunde des Tetraeders: Wie könnte man in Analogie zu den Klassifikationsmöglichkeiten des Dreiecks nach Art der Seiten, Innenwinkel und Symmetrie eine Formenkunde des Tetraeders entwickeln.
- Tetraederkonstruktionen: Wie kann man die Dreieckskonstruktionslehre für Tetraeder analogisieren? – Wie lassen sich die Kongruenzsätze bzw. Ähnlichkeitssätze für Dreiecke analog auf Tetraeder übertragen?

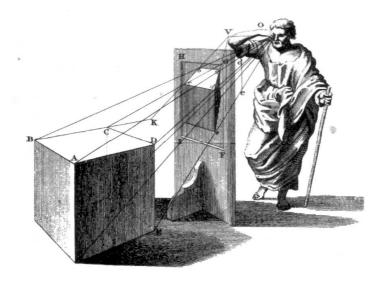
Natürlich sind damit noch nicht alle Analogisierungsmöglichkeiten in Bezug auf das Thema "Dreieck – Tetraeder" erschöpft. Wir erwähnen hier nur noch als Beispiel die Analogisierung des Satzes über die konstante Abstandssumme eines Punktes P im Inneren oder auf dem Rand eines gleichseitigen Dreiecks (Abb. 47) zu einem

entsprechenden Satz über das reguläre Tetraeder (Abb. 48): Die Abstandssumme ist unabhängig von der Lage des Punktes P gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks bzw. des regulären Tetraeders, was wir jeweils durch Konstruktion einer Höhe aus den Abstandstrecken feststellen können.

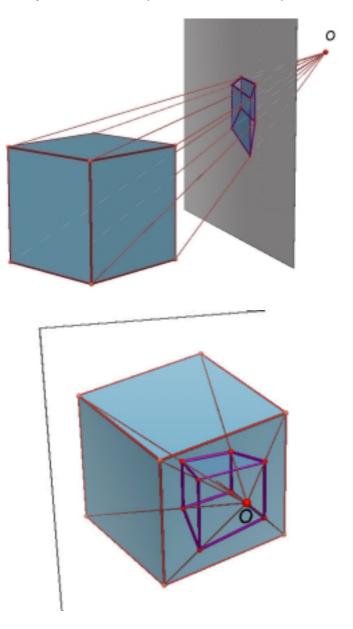
Schlussbemerkung: Dank des computerunterstützten raumgeometrischen Konstruierens, Darstellens und Variierens mit Cabri 3D können wir uns heute das weite Feld der Analogiebildungen zwischen Ebene und Raum besser erschließen bzw. überhaupt erst Analogisierungsmöglichkeiten auf experimentelle Weise erforschen.

#### 4. Literatur

- Bainville, E., Laborde, J.-M. (2004): Cabri 3D 1.0. (Software). Grenoble: Cabrilog Bauer, H. et al. (1999): Körpergeometrie. (Software). Berlin: Cornelsen
- Donath, E. (1976): Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. Berlin: DVW
- Fritsch, R. (1986): Vorschläge für die Raumgeometrie in der Mittelstufe. In: MNU 39, Heft 6, S. 339 348
- Fritsch, R. (1983 1984): Merkwürdige Kugeln am Tetraeder. In: DdM 11 (1983), S. 262 269; 12 (1984), S. 18 35
- Neubrand, M. (1985): Analoga im Tetraeder zu den sogenannten merkwürdigen Punkten des Dreiecks. In: PM 27 Nr. 5, S. 268 274
- Polya, G. (1962): Mathematik und plausibles Schließen. Band I, Induktion und Analogie in der Mathematik. Basel: Birkhäuser
- Schumann, H. (2001): Raumgeometrie Unterricht mit Computerwerkzeugen. Berlin: Cornelsen
- Schumann, H. (2005): Dynamische Raumgeometrie. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005
- Tietz, H. (1972): Die Raumhöhen des Tetraeders. In: MNU 25, S. 19 20
- Tietz, H. (1974): Tetraeder mit berührenden Inkreisen. In: Math.-Phys. Semesterberichte 21, S. 143 144



Brook Taylor: New Principles of Linear Perspective, 1719



Entdeckung von Analogien mit Cabri 3D © 2004 by Dr. Heinz Schumann, PH Weingarten