

Materialien für die konstruktive Analogisierung ebener Geometrie im virtuellen Raum

„Analoge Dinge stimmen in gewissen Beziehungen zwischen ihren entsprechenden Teilen miteinander überein.“
G. Pólya

Die Analogisierung ist eine effektive und weitreichende Methode der Erkenntnisgewinnung. Deshalb wird ihre explizite Vermittlung im Mathematikunterricht neben der anderer heuristischer Methoden immer wieder gefordert. Die an Analogien reiche Elementargeometrie, insbesondere die Analogien zwischen ebener und räumlicher Geometrie, eignen sich besonders wegen ihrer Anschaulichkeit als Übungsfeld für das Analogisieren in den Sekundarstufen. Mit den Konstruktions- und Visualisierungsmöglichkeiten, die Cabri 3D bietet, kann man die räumliche Analogisierung ebener Geometrie konstruktiv praktizieren.

Im folgenden sollen einige ausgewählte konstruktive Analogiebildungen aufgelistet werden.

1. Analogisierung von Basiskonstruktionen

1.1 Die Konstruktion einer Geraden durch zwei verschiedene Punkte
(Konstruktion Verbindungsgerade mittels Geraden-Lineal)

analogisieren zu:

Die Konstruktion einer Ebene durch drei nicht auf einer Geraden liegender Punkte.
(Konstruktion einer Verbindungsebene mittels Ebenen-Lineal)

1.2 Die Konstruktion eines Kreises um einen Punkt als Mittelpunkt durch einen Punkt als Kreispunkt.
(Konstruktion eines Kreises mittels Kreis-Zirkel)

analogisieren zu:

Die Konstruktion einer Kugel um einen Punkt als Mittelpunkt durch einen Punkt als Kugelpunkt
(Konstruktion einer Kugel mittels Kugel-Zirkel)

1.3 Die Konstruktion des Schnittpunktes einer Geraden mit einer nichtparallelen Geraden.
(Konstruktion Geradenschnittpunkt)

analogisieren zu:

Die Konstruktion des Schnittpunkts einer Geraden mit einer Ebene, zu der die Gerade nicht parallel ist.
(Konstruktion Schnittpunkt Gerade mit Ebene)
Die Konstruktionen der Schnittgeraden zweier nichtparalleler Ebenen
(Konstruktion Schnittgerade Ebene mit Ebene)

1.4 Die Konstruktion der Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis
(Konstruktion Schnittpunkte Gerade mit Kreis)

analogisieren zu:

Die Konstruktion der Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kugel
(Konstruktion Schnittpunkte Gerade mit Kugel)

Die Konstruktion des Schnittkreises einer Ebene mit einer Kugel
(Konstruktion Schnittkreis Ebene mit Kugel)

1.5 Die Konstruktion der Schnittpunkte eines Kreises mit einem Kreis
(Konstruktion Schnittpunkte Kreis mit Kreis)

analogisieren zu:

Die Konstruktion des Schnittkreises einer Kugel mit einer Kugel
(Konstruktion Schnittkreis Kugel mit Kugel)

2. Analogisierung von Grundkonstruktionen

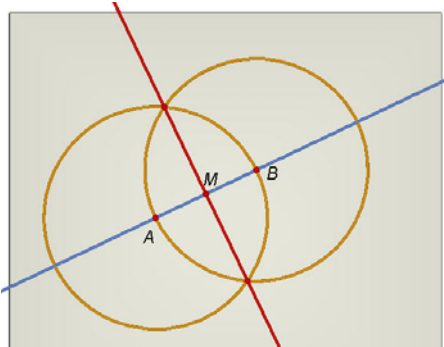


Abb. 1.1 Mittelsenkrechte Gerade zu zwei Punkten

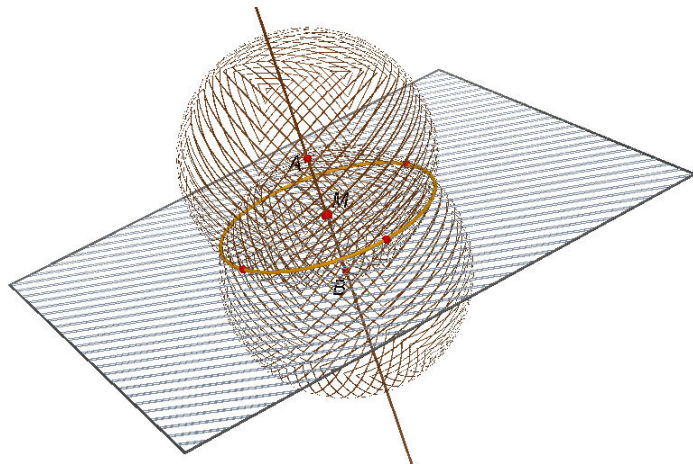


Abb. 1.2 Mittelsenkrechte Ebene zu zwei Punkten

Konstruktion „Mittelsenkrechte Ebene zu zwei Punkten“: Gegeben sind zwei Punkte. Wir konstruieren zwei Kugeln, jeweils um einen der Punkte durch den anderen. Zu den beiden Kugeln konstruieren wir den Schnittkreis, zu dem die gesuchte Ebene konstruiert werden kann. Der Schnittpunkt von Ebene und Verbindungsgerade der zwei Punkte ist ihr **Mittelpunkt**.

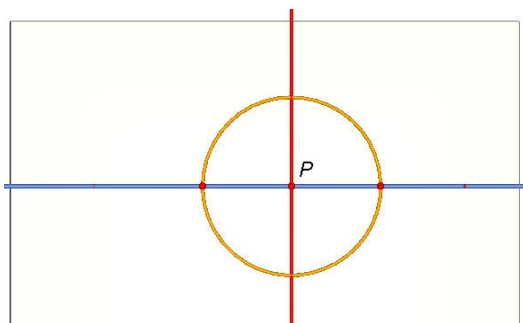


Abb. 2.1 Lot-Errichten in einem Punkt einer Geraden

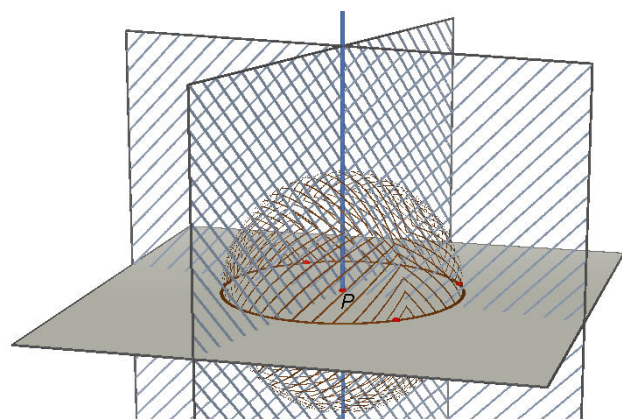


Abb. 2.2 Lot-Errichten in einem Punkt einer Ebene

Konstruktion „Lotgerade in einem Punkt der Ebene zu dieser Ebene“ (Lot-Errichten): Wir konstruieren um den gegebenen Punkt durch einen weiteren beliebig gewählten Punkt eine Kugel. Der Schnittkreis dieser Kugel mit der Ebene wird

konstruiert. Die Schnittgerade zweier mittelsenkrechter Ebenen zu Kreispunkten liefert das gesuchte Lot.

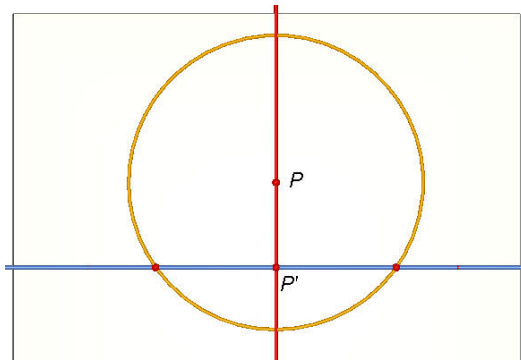


Abb. 3.1 Lot-Fällen von einem Punkt auf eine Gerade

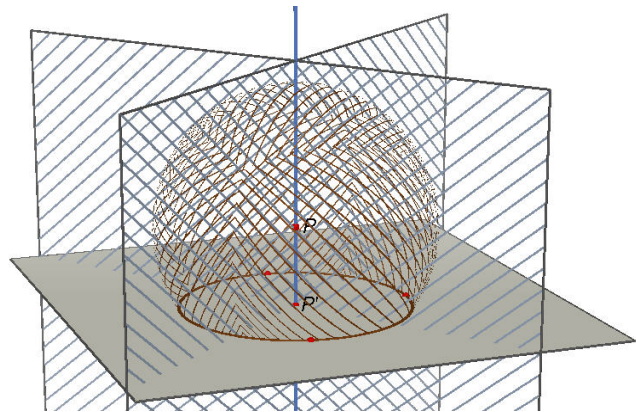


Abb. 3.2 Lot-Fällen von einem Punkt auf eine Ebene

Konstruktion „Lotgerade von einem Punkt zu einer Ebene“ (Lot-Fällen): Wir konstruieren eine Kugel um den gegebenen Punkt durch einen Punkt der gegebenen Ebene. Aus Punkten auf dem konstruierten Schnittkreis werden zwei mittelsenkrechte Ebenen konstruiert, deren Schnittgerade das gesuchte Lot ist.

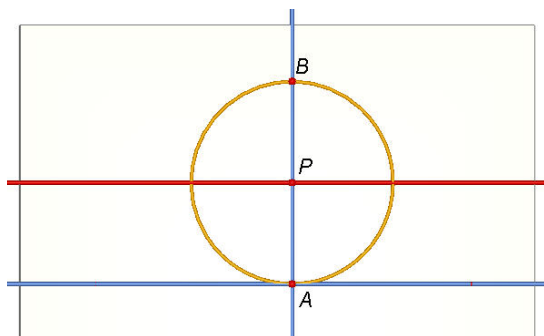


Abb. 4.1 Parallele Gerade durch einen Punkt zu einer Geraden

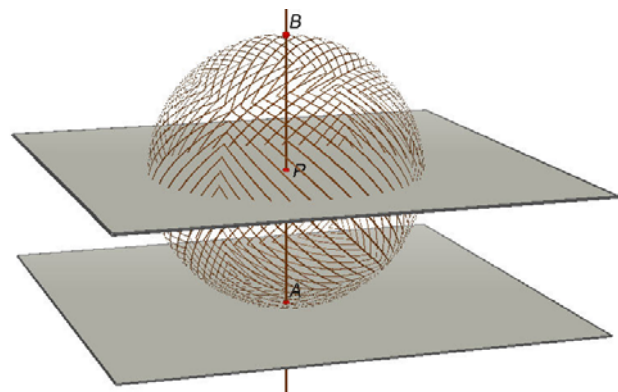


Abb. 4.2 Parallele Ebene durch einen Punkt zu einer Ebene

Konstruktion „Parallele Ebene durch einen Punkt zu einer Ebene“: Wir fällen das Lot vom gegebenen Punkt auf die Ebene und erhalten den Lotfußpunkt. Die um den gegebenen Punkt durch den Lotfußpunkt konstruierte Kugel wird vom Lot in einem weiteren Punkt geschnitten. Die gesuchte parallele Ebene erhält man als mittelsenkrechte Ebene aus diesem Punkt und dem Lotfußpunkt.

Konstruktion „Winkelhalbierende Ebene zwischen zwei (Halb-)Ebenen“: Wir beginnen mit der Konstruktion der Schnittgeraden der beiden Ebenen. Um diese Gerade als Achse konstruiert man einen Kreis durch einen beliebigen Punkt in einer der gegebenen Ebenen. Die Kreisebene schneidet die andere Ebene in einer Geraden. Die mittelsenkrechte Ebene aus dem Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Kreis und dem ursprünglichen Kreispunkt ist die winkelhalbierende Ebene.

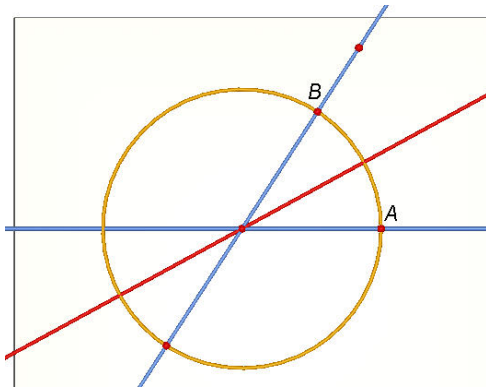


Abb. 5.1 Winkelhalbierende Gerade

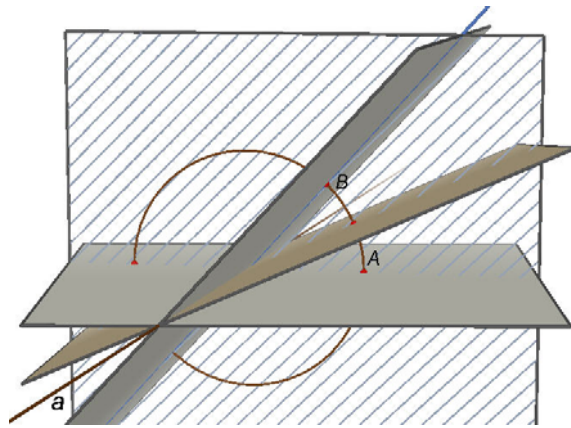


Abb. 5.2 Winkelhalbierende Ebene

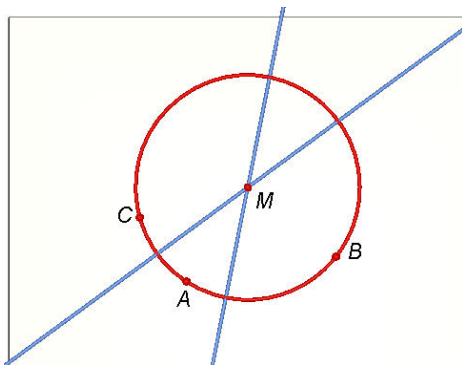


Abb. 6.1 Kreis aus drei Punkten

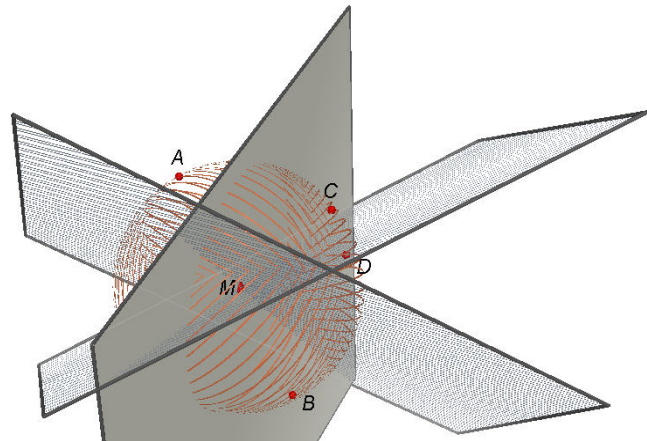


Abb. 6.2 Kugel aus vier Punkten

Konstruktion „Kugel aus vier Punkten“: Der Schnittpunkt dreier mittelsenkrechter Ebenen, die man wahlweise aus je zwei von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten konstruiert, ist der Kugelmittelpunkt.

Regelmäßiges Tetraeder aus 3 Kugeln: Als ein weiteres Beispiel für die Analogisierung einer elementaren Konstruktion in der Ebene konstruieren wir in einer Ebene ein gleichseitiges Dreieck nach der ersten Konstruktion Euklids, indem wir um jeden von zwei Punkten einen Kreis durch den anderen legen usw. (Abb. 7.1). Die Ebene wird nun nach hinten gedreht. Um jeden der drei Eckpunkte des gleichseitigen Dreiecks konstruieren wir eine Kugel durch einen weiteren dieser Eckpunkte. Die Schnittkreise von je zwei der drei Kugeln schneiden einander in der Spitze des regelmäßigen Tetraeders, dessen Basis das gleichseitige Dreieck bildet (Abb. 7.2).

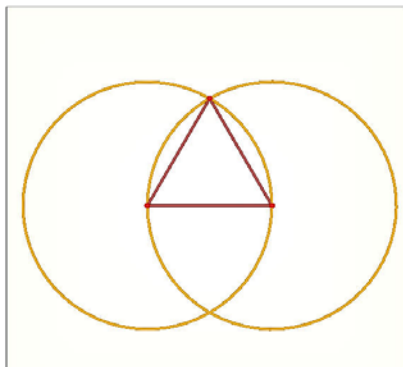


Abb. 7.1 Gleichseitiges Dreieck

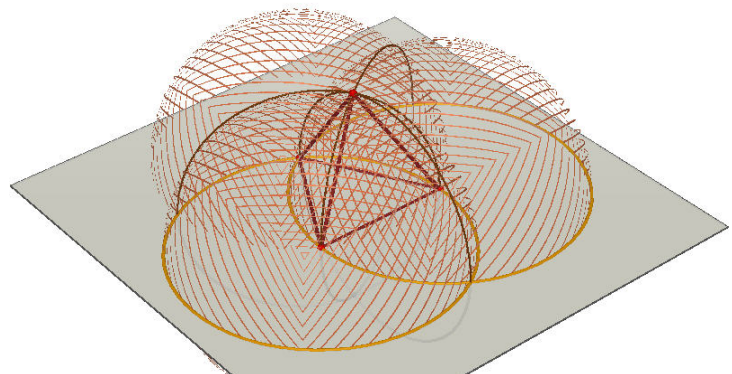


Abb. 7.2 Regelmäßiges Tetraeder

3. Analogisierung von Kreistangenten-Konstruktionen

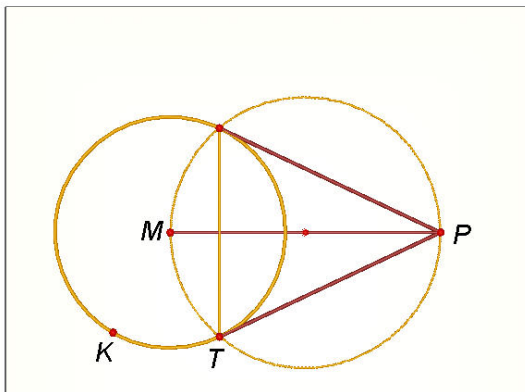


Abb. 8.1 Tangenten von Punkt an Kreis

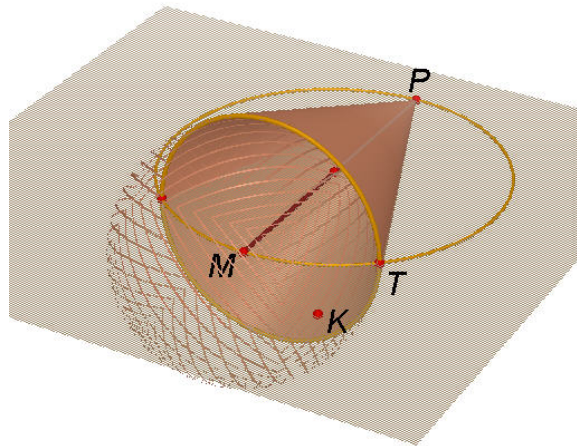


Abb. 8.2 „3D-Analogon 1. Art“

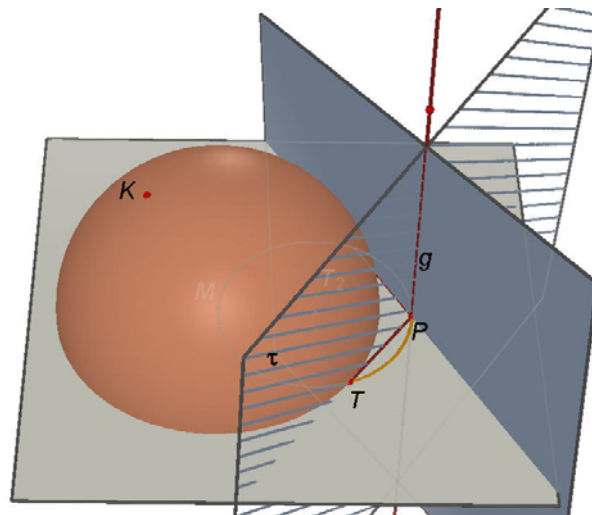


Abb. 8.3 „3D-Analogon 2. Art“

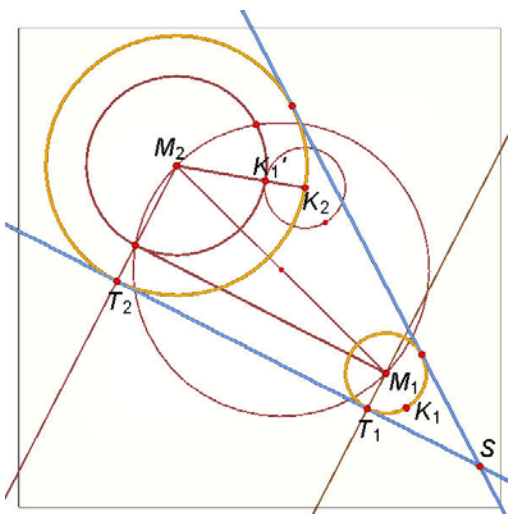


Abb. 9.1 Äußere Kreistangenten

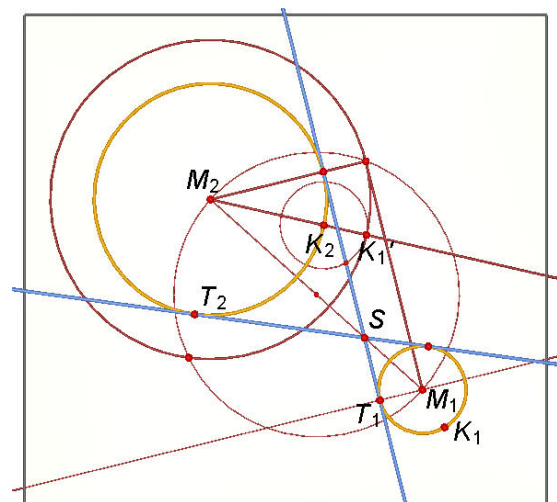


Abb. 10.1 Innere Kreistangenten

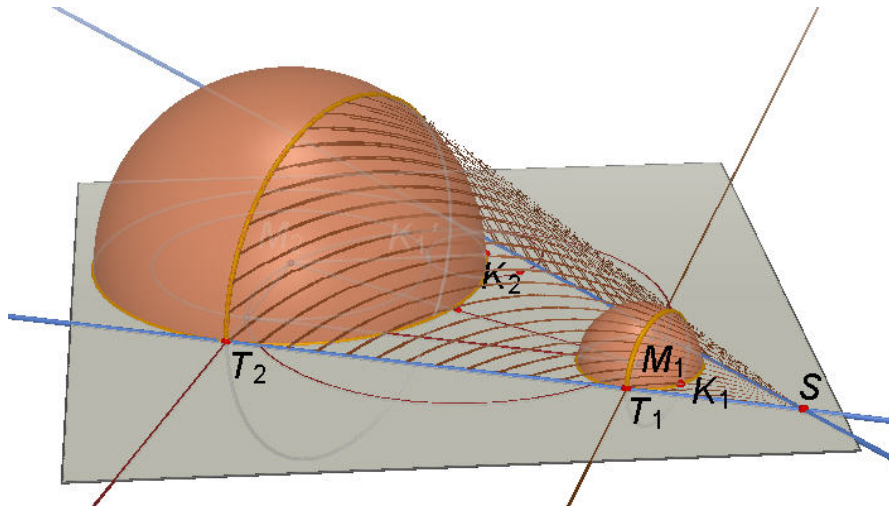


Abb. 9.2 3D-Analogon: Äußerer Berührkegel

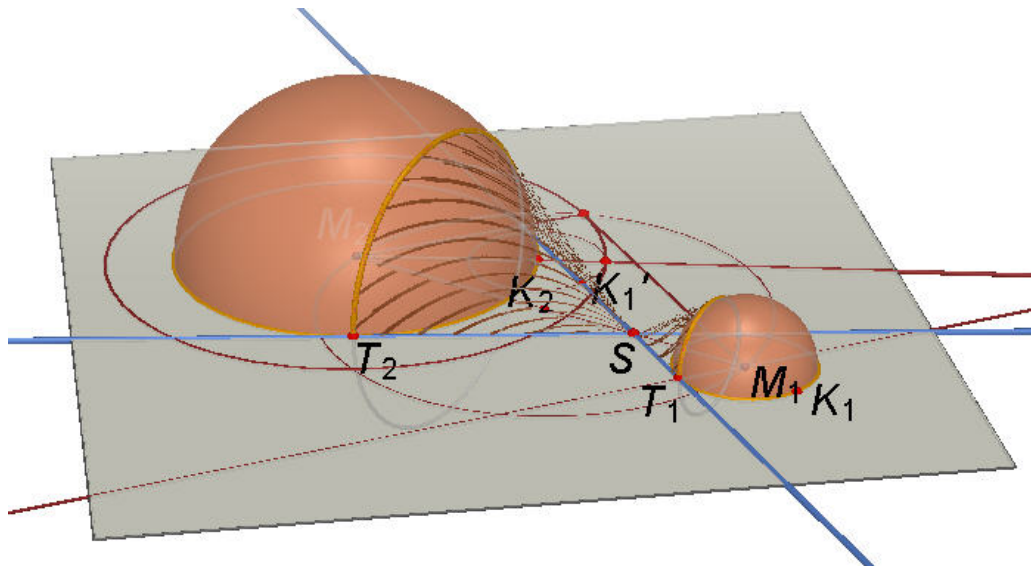


Abb. 10.2 3D-Analogon: Innerer Berührdoppelkegel

Analogisierung von Kreis-Berührungsaufgaben

an folgenden Aufgaben exemplarisch gezeigt:

- Einen Kreis durch zwei gegebene Punkte konstruieren, der eine gegebene Gerade berührt.
- Einen Kreis durch einen gegebenen Punkt konstruieren, der zwei gegebene Geraden berührt.
- Einen Kreis konstruieren, der drei gegebene Geraden berührt.

Analogisieren zu:

- Eine Kugel durch drei gegebene Punkte konstruieren, die eine gegebene Ebene berührt.
- Eine Kugel durch zwei gegebene Punkte konstruieren, die zwei gegebene Ebenen berührt.

- Eine Kugel durch einen gegebenen Punkt konstruieren, die drei gegebene Ebenen berührt.
- Eine Kugel zu konstruieren, die vier gegebene Ebenen berührt.

Einen Kreis von gegebenem Radius zu konstruieren, so dass

- a) er eine gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.
- b) er einen gegebenen Kreis berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.
- c) er zwei gegebene Geraden berührt.
- d) er eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.
- e) er zwei gegebene Kreise berührt.

Analogisieren zu:

Eine Kugel von gegebenem Radius zu konstruieren, so dass

- a) sie eine gegebene Ebene berührt und durch zwei gegebene Punkte geht.
 - b) sie eine gegebene Kugel berührt und durch zwei gegebene Punkte geht.
 - c) sie zwei gegebene Ebenen berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.
 - d) sie eine gegebene Ebene und eine gegebene Kugel berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.
 - e) sie zwei gegebene Kugeln berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.
 - f) sie zwei gegebene Ebenen und eine gegebene Kugel berührt
 - g) sie eine gegebene Ebene und zwei gegebene Kugeln berührt.
- sie drei gegebene Kugeln berührt.

Berührung dreier Geraden durch zwei Kreise: Konstruiere zu drei Geraden, von denen je zwei einander schneiden, die Berührungskreise.

Analoge Aufgabe: Konstruiere zu zwei diametralen Kegelerzeugenden, die in einer Ebene liegen und die von einer dritten Geraden geschnitten werden die Berührungskugeln mit Mittelpunkten in dieser Ebene. (Konstruktion der Dandelin-Kugeln im Kegel)

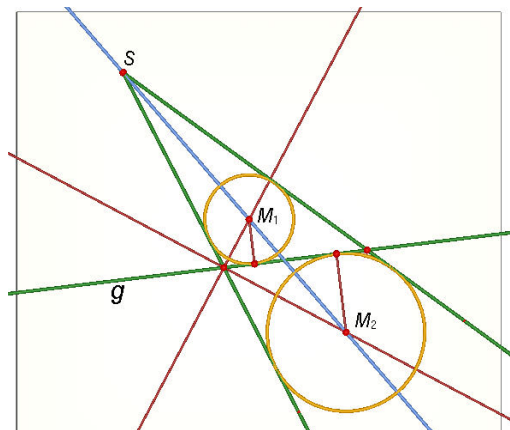


Abb. 11.1 2D-Konstruktion

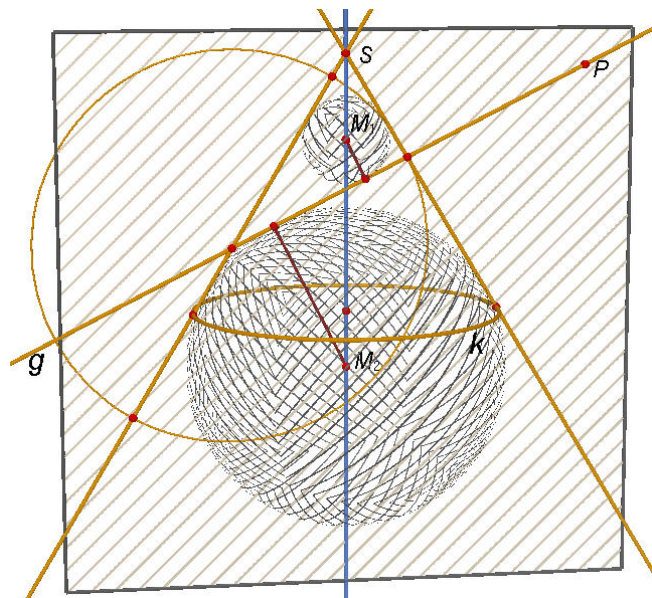


Abb. 11.2a 3D-Konstruktion

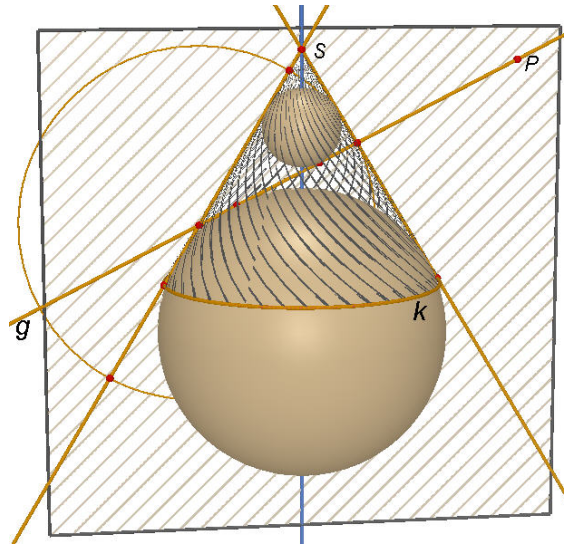


Abb. 11.2b Dandelin-Kugeln

4. Analogisierung von Kreispotenz-Punkten und -Geraden

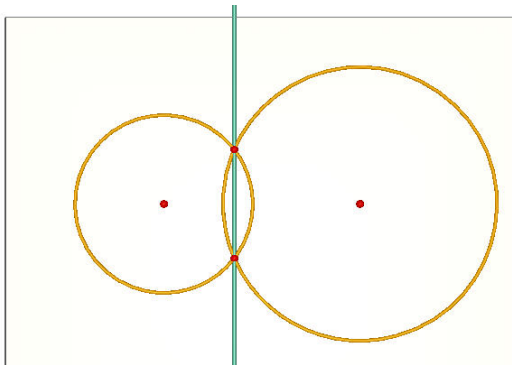


Abb. 12.1 Potenzgerade

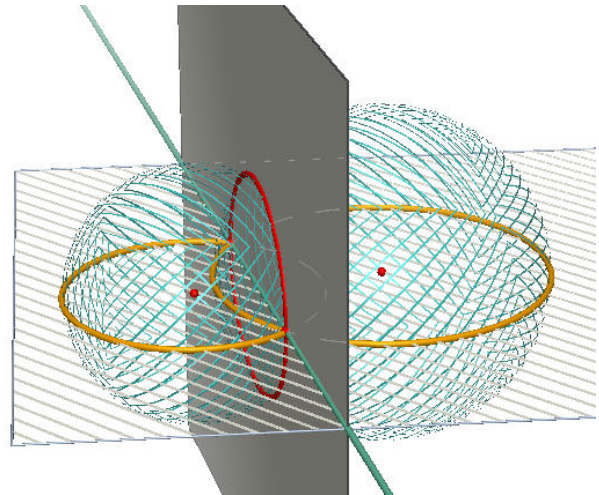


Abb. 12.2 Potenzebeene

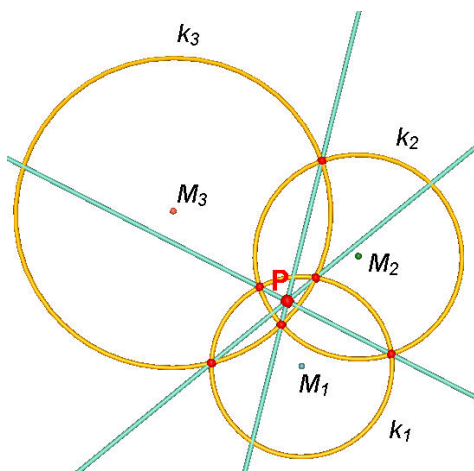


Abb. 13.1 Potenzpunkt

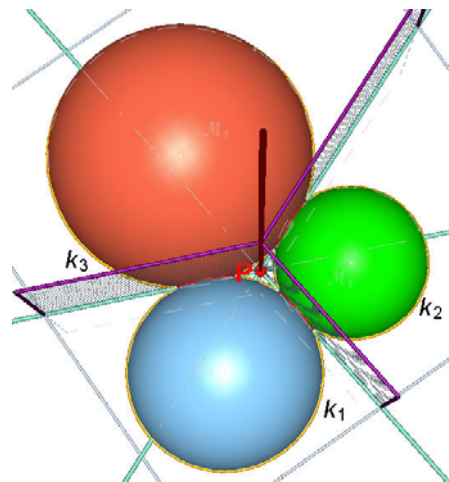


Abb. 13.2 „3D-Analogon 1. Art“

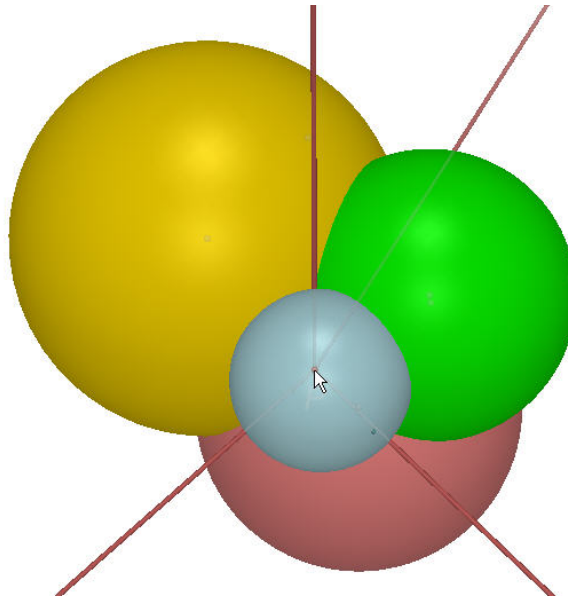


Abb. 13.3 „3D-Analogon 2. Art“

5. Weitere Kreisanalogisierungen

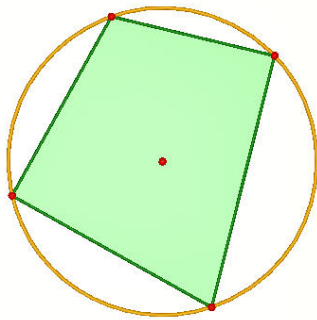


Abb. 14.1 Umkreis-Viereck

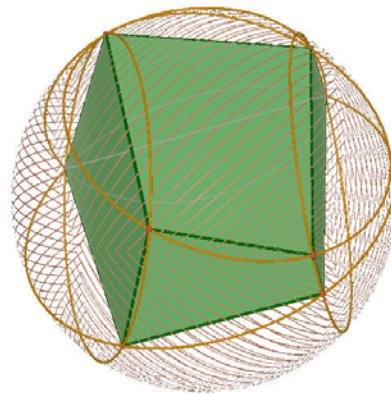


Abb. 14.2 Umkugel-Hexaeder aus Vierecken

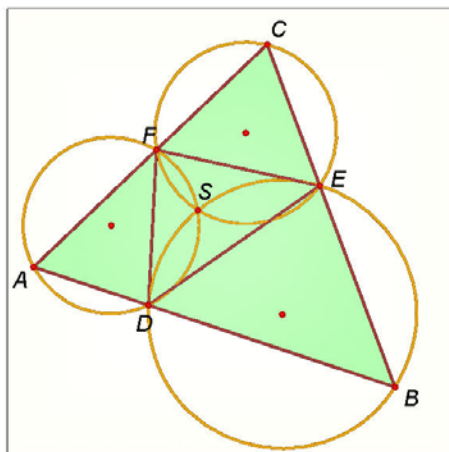


Abb. 15.1 Satz von Miquel

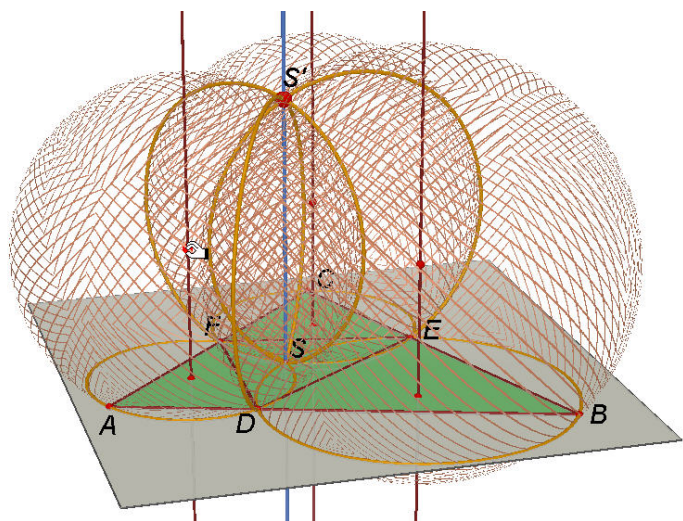


Abb. 15.2 „3D-Analogon 1. Art“

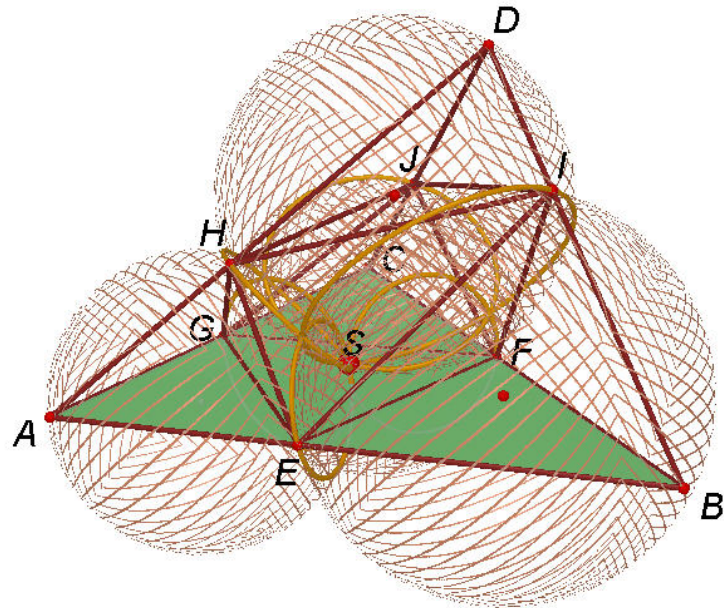


Abb. 15.3 „3D-Analogon 2. Art“

6. Analogisierung der Lage ebener Geraden

Beispiel: Analogisierung der Lage dreier Geraden zur Lage dreier Ebenen

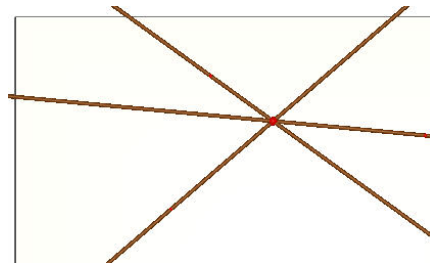


Abb. 16.1 Drei einander schneidende Geraden

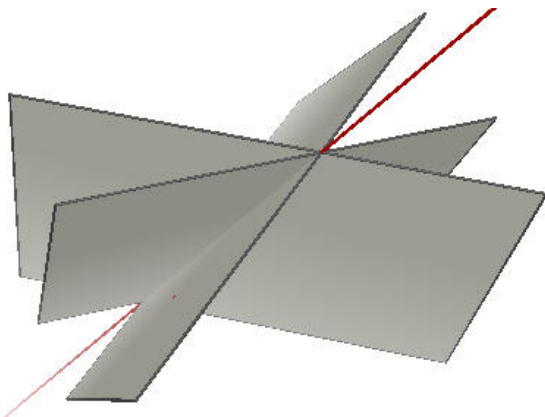


Abb. 16.2 „3D-Analogon 1. Art“

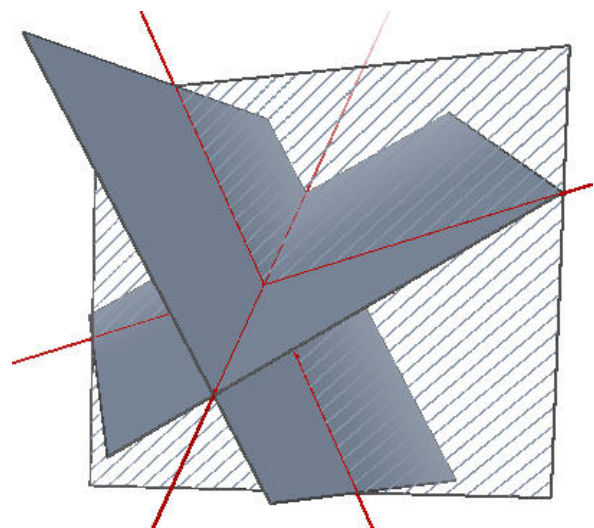


Abb. 16.3 „3D-Analogon 2. Art“

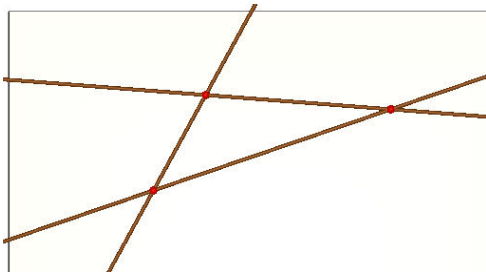


Abb. 17.1 Drei nur paarweise einander schneidende Geraden

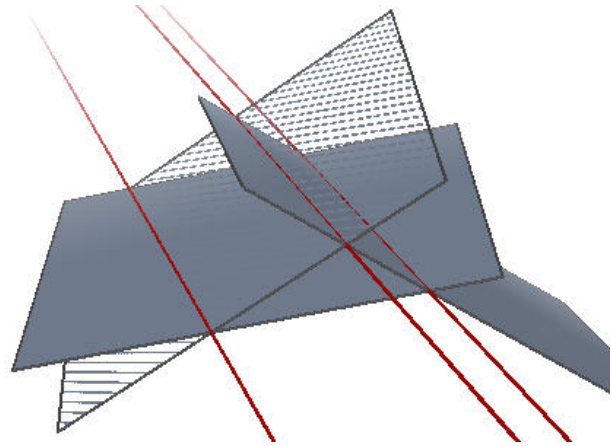


Abb. 17.2 „3D-Analogon“

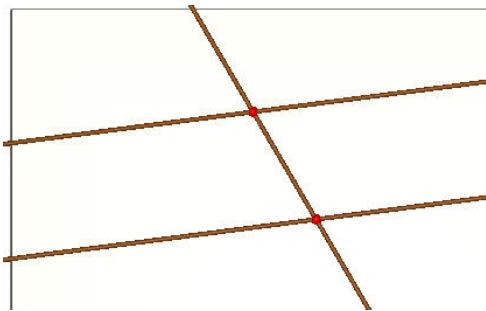


Abb. 18.1 Ein Paar paralleler Geraden geschnitten von einer dritten Geraden

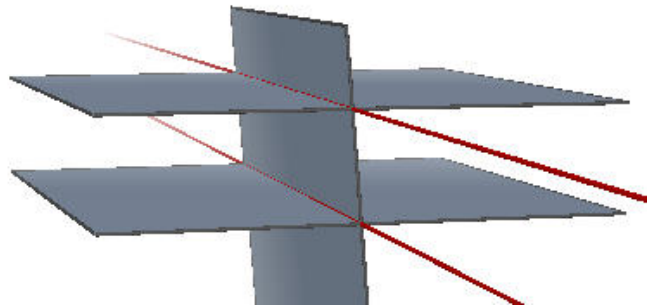


Abb. 18.2 „3D-Analogon“

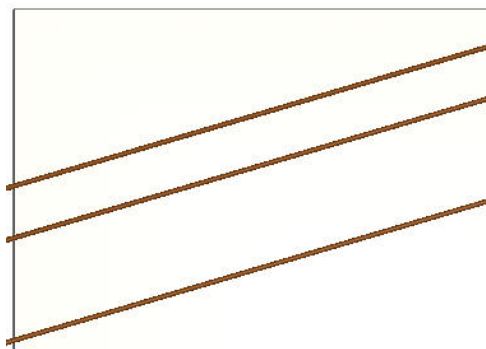


Abb. 19.1 Drei einander parallele Geraden

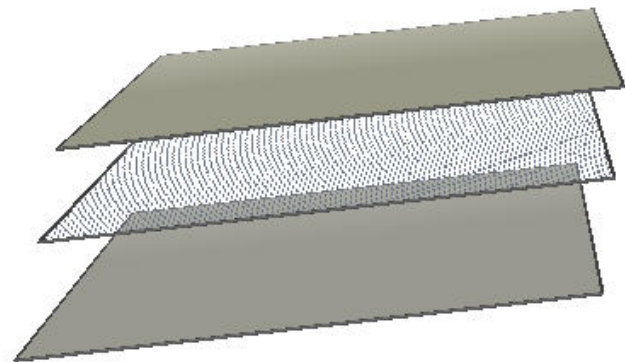


Abb. 19.2 „3D-Analogon“

7. Analogisierung ebener Abbildungen

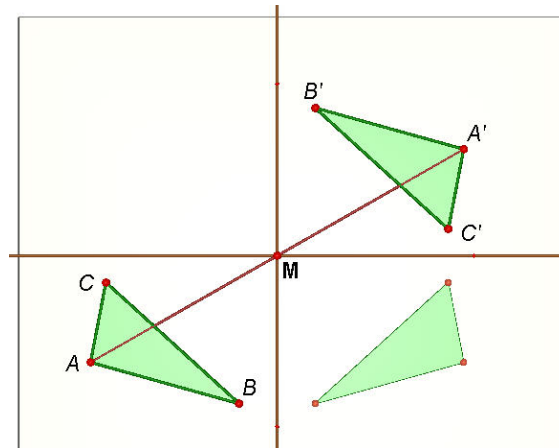


Abb. 20.1 Ebene Punktspiegelung

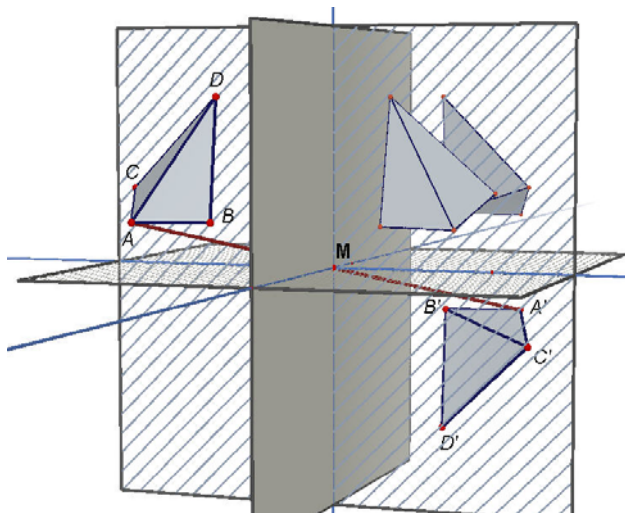


Abb. 20.2 „3D-Analogon 1. Art“

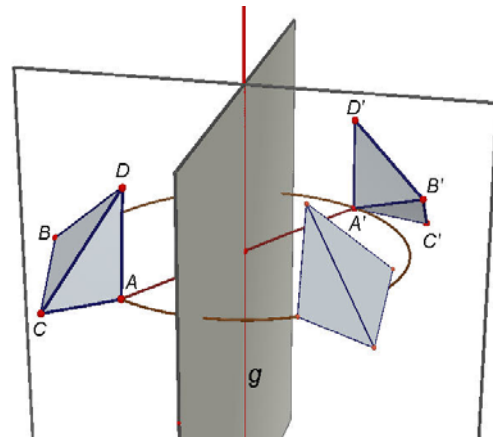


Abb. 20.2 „3D-Analogon 2. Art“

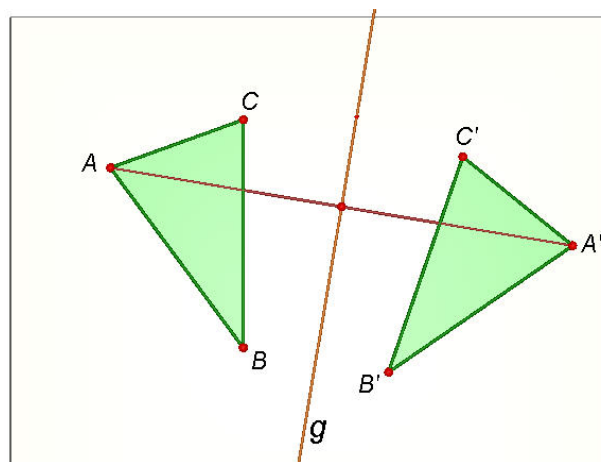


Abb. 21.1 Ebene Geradenspiegelung

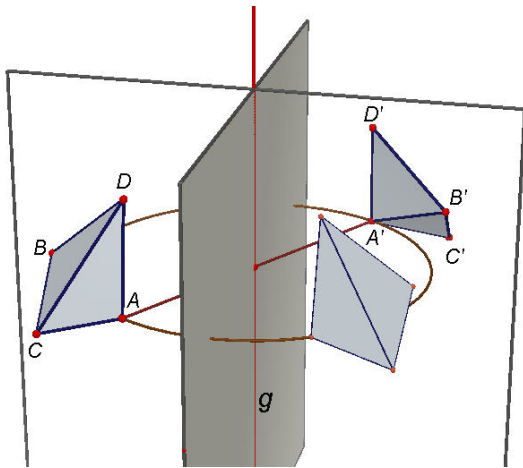


Abb. 21.2 „3D-Analogon 1. Art“

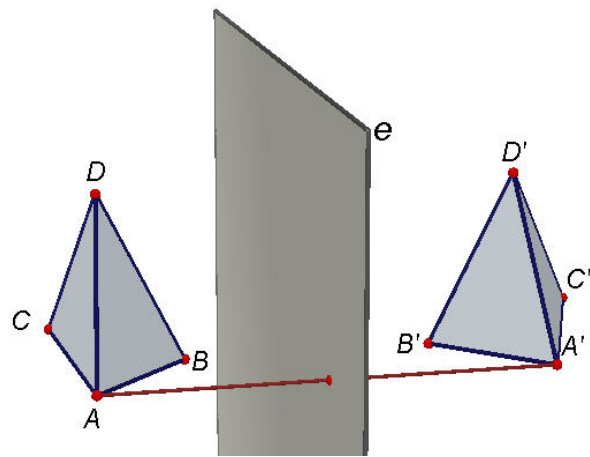


Abb. 21.3 „3D-Analogon 2. Art“

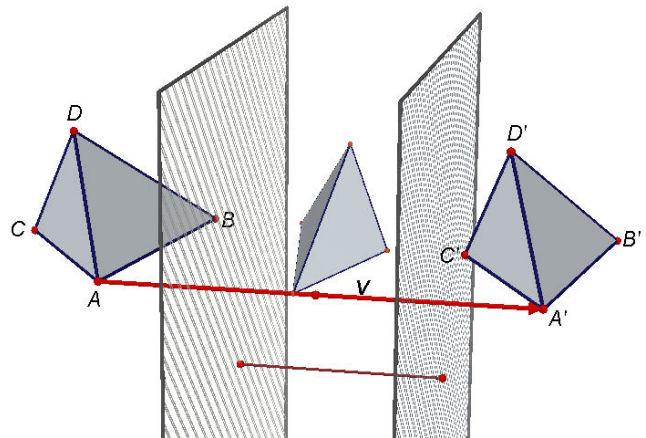
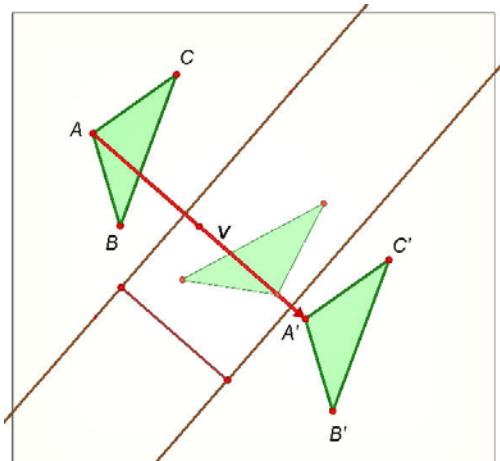


Abb. 22.1 Ebene Parallelverschiebung Abb. 22.2 „3D-Analogon“

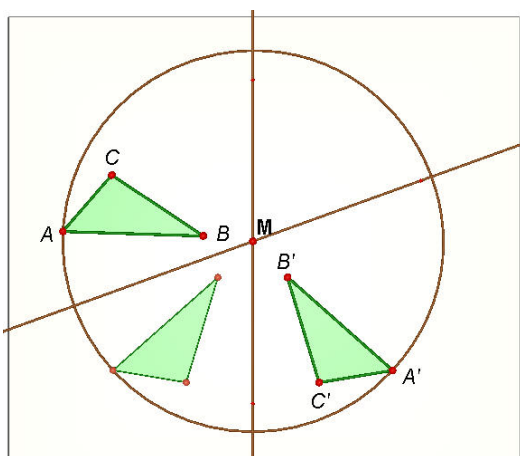


Abb. 23.1 Ebene Drehung

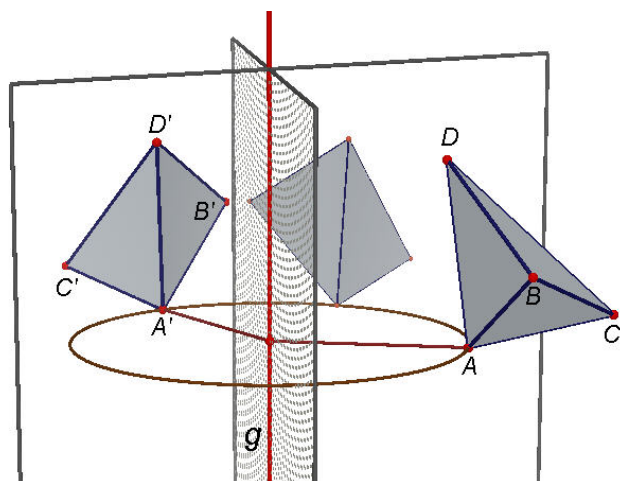


Abb. 23.2 „3D-Analogon“

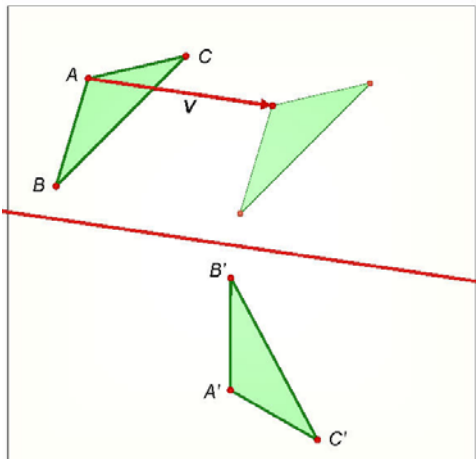


Abb. 24.1 Ebene Schubspiegelung

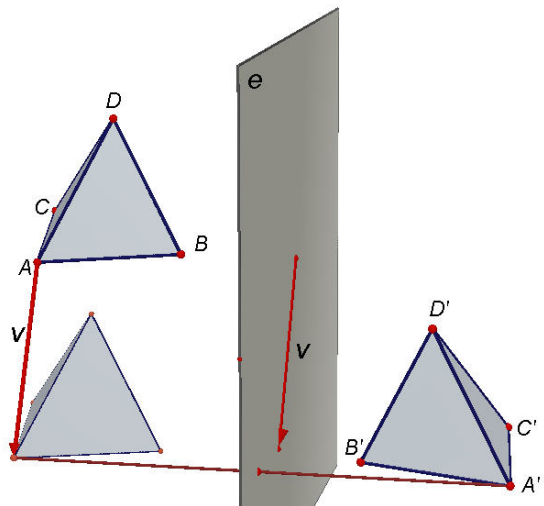


Abb. 24.2 „3D-Analogon“

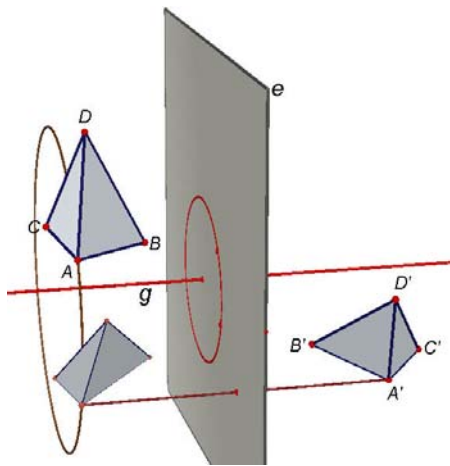


Abb. 25 Drehspejelung

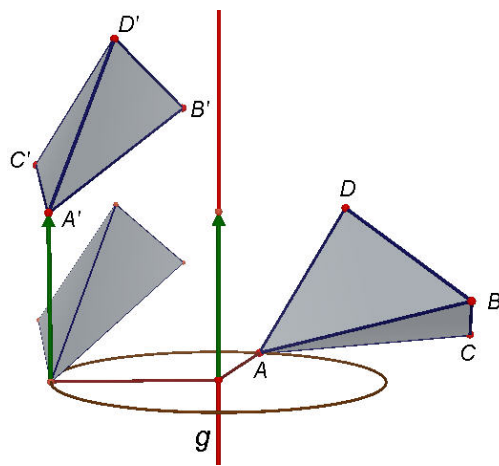


Abb. 26 Schraubung

.... Analogisierung des Dreigeradenspiegelungssatzes
zum Vierebenenspiegelungssatz.

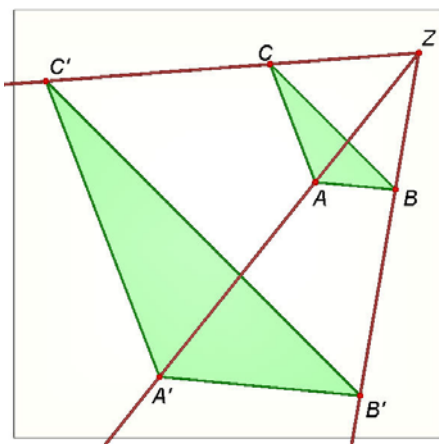


Abb. 27.1 Ebene zentrische Streckung

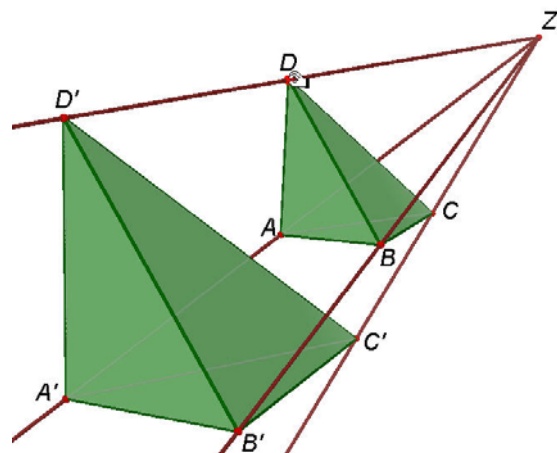


Abb. 27.2 „3D-Analogon“

Entsprechend: Analogisierung der affinen Abbildungen, der Kreisspiegelung, ...

8. Analogisierung besonderer Linien und Punkte im Dreieck

vgl. Schumann, H. (2004): Entdeckung von Analogien mit Cabri 3D am Beispiel „Dreieck – Tetraeder“. In: math. did. 27, Bd. 1, S. 82-99

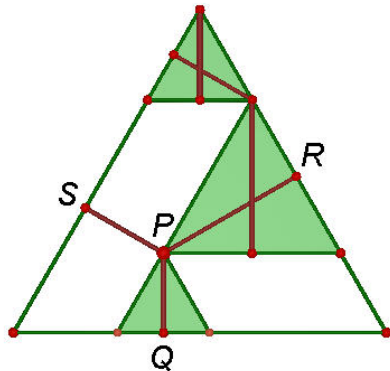


Abb. 28.1 Abstandssumme im gleichseitigen Dreieck

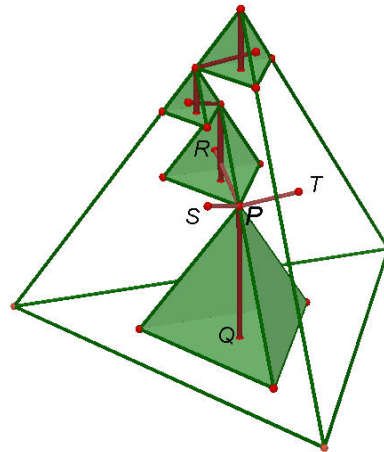


Abb. 28.2 „3D-Analogon“

9. Analogisierung der Kongruenzsätze für Dreiecke

Analogisierung der Kongruenzsätze für Dreiecke zu solchen für dreiseitige Raumecken:

sss analogisieren zu:

Zwei dreiseitige Raumecken sind kongruent genau dann, wenn sie in den Seitenflächenwinkeln übereinstimmen.

sws analogisieren zu:

Zwei dreiseitige Raumecken sind kongruent genau dann, wenn sie in zwei Seitenflächenwinkeln und in dem von diesen Seitenflächen eingeschlossenem Kantenwinkel übereinstimmen.

wsw analogisieren zu:

Zwei dreiseitige Raumecken sind kongruent genau dann, wenn sie in einem Seitenflächenwinkel und in den dieser Seitenfläche anliegenden Kantenwinkeln übereinstimmen.

Ssw analogisieren zu:

Zwei dreiseitige Raumecken sind kongruent genau dann, wenn sie in zwei Seitenflächenwinkeln und in dem der Seitenfläche mit dem größeren Flächenwinkel gegenüberliegenden Kantenwinkel übereinstimmen.

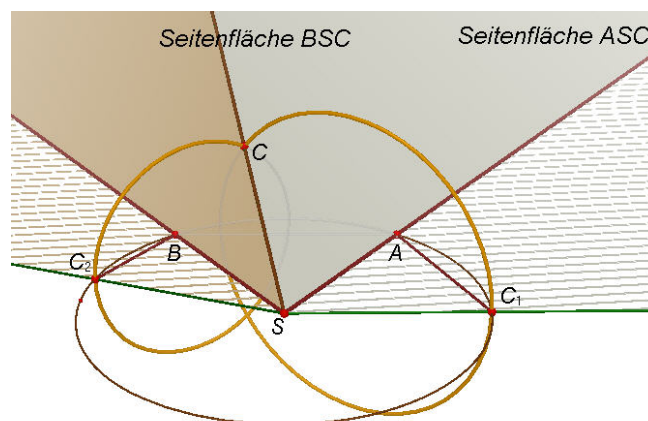


Abb. 29a Dreiseitige Raumecke von außen mit Teilnetz

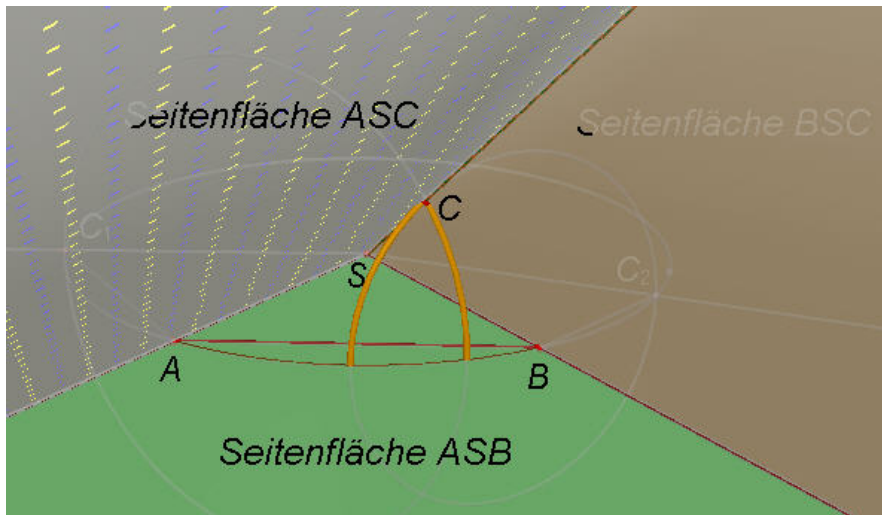


Abb. 29b Dreieckige Raumecke von innen

Analogisierung der Dreiecksungleichung zu: Je zwei Seitenflächenwinkel einer dreiseitigen Raumecke sind stets größer als der dritte Seitenflächenwinkel.

10. Analogisierung einer klassischen Extremwertaufgabe

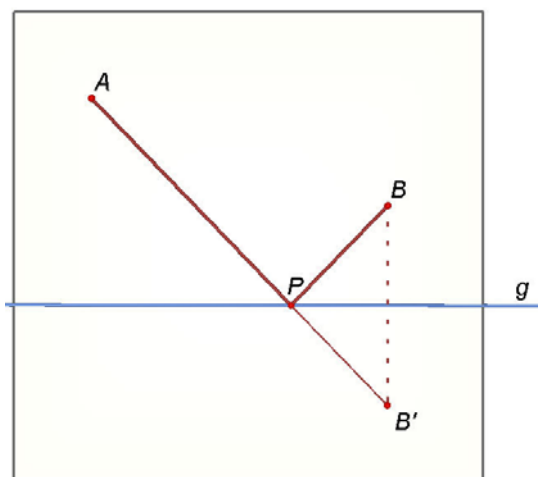


Abb. 30.1 Die ebene Aufgabe mit Lösung

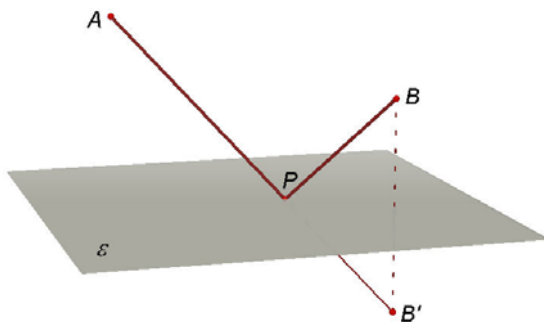


Abb. 30.2 „3D-Analogon 2. Art“

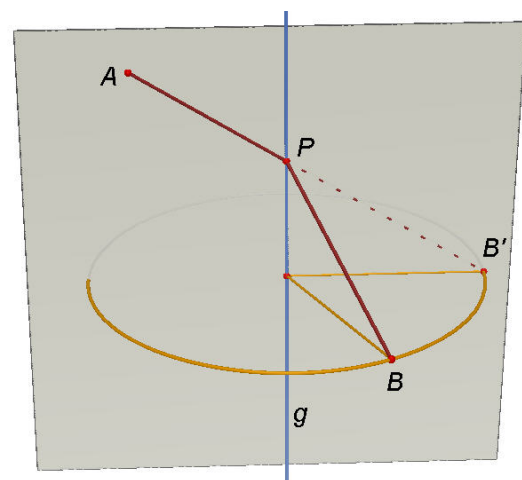


Abb. 30.3 „3D-Analogon 1. Art“