

Sätze über Kreise raumgeometrisch beweisen mit Cabri 3D

Herrn Prof. Dr. Hans Schupp zum 70. Geburtstag gewidmet

Das dynamische Raumgeometrie-System Cabri 3D eignet sich nicht nur für die Entdeckung und Veranschaulichung raumgeometrischer Sätze als Invarianzaussagen bei Lage- und Formvariation der betreffenden Konfigurationen (Schumann 2004/2005), sondern auch zur Konstruktion und Visualisierung raumgeometrischer Beweise. Üblicherweise begründet man Aussagen der synthetischen Raumgeometrie mittels einer Kombination von Aussagen der ebenen und räumlichen Geometrie. Es gibt aber auch Aussagen der ebenen Geometrie, die sich auf elegante Art und Weise durch Verräumlichen, also im Wesentlichen mittels raumgeometrischer Begriffe und Aussagen beweisen lassen. Das zeigen wir beispielgebend an den folgenden Sätzen. Dabei kommt zum Tragen das räumliche Verstehen der Beweisargumentation durch entsprechende Konstruktion und Visualisierung der Beweisfigur und deren Variation durch Verziehen – auch zu den Spezialfällen.

Beispiel 1 (Sehnensatz)

Für die Abschnitte einander schneidender Sehnen des Kreises gilt: $a \cdot b = c \cdot d$ (Abb. 1). Das kann mittels ähnlicher Dreiecke bewiesen werden.

Zum räumlichen Beweis konstruieren wir eine Kugel um den Kreismittelpunkt M , die den gleichen Radius wie der Kreis hat (Abb. 2). Wir errichten im Schnittpunkt P der Sehnen das Lot auf die Kreisebene, das die Kugel im Punkt H durchstößt (Abb. 3). Nun konstruiert man die Kreise mit den Sehnen als Durchmesser, die durch H gehen. Diese Kreise sind Thaleskreise. Die rechtwinkligen Dreiecke AHB und CHD besitzen h als gemeinsame Höhe und es gilt nach dem Höhensatz:

$$h^2 = a \cdot b = c \cdot d.$$

Die Produkte der entsprechenden Abschnitte jeder Kreissehne, die durch P geht, sind also alle einander gleich. Das Produkt bezeichnet man als Potenz des (inneren) Punktes P bezüglich des betreffenden Kreises.

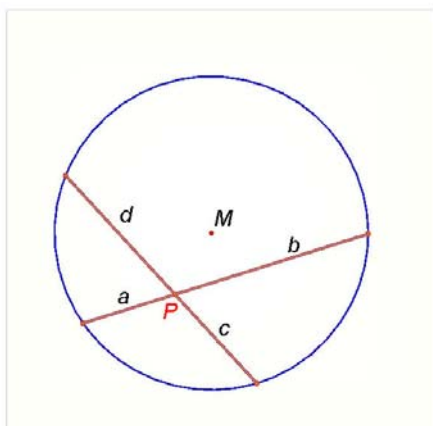


Abb. 1

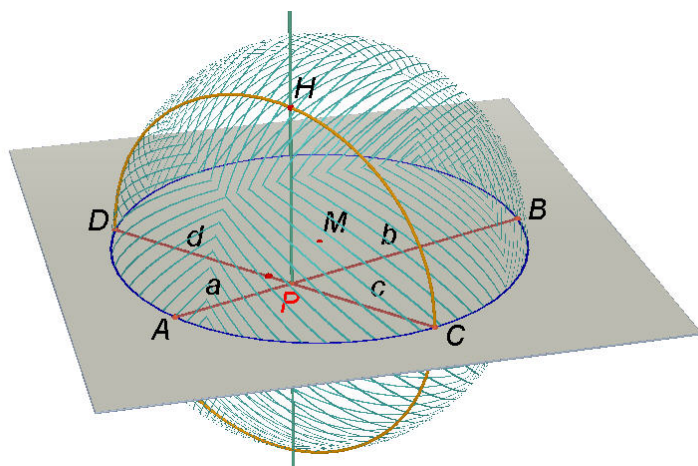


Abb. 2

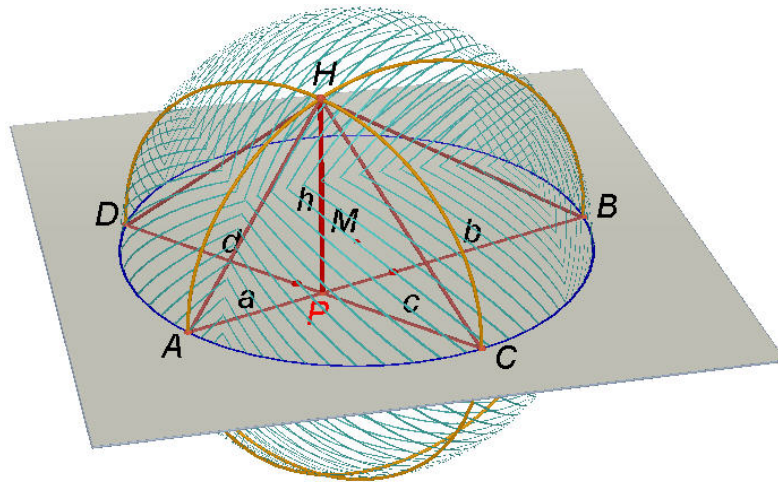


Abb. 3

Erweiterung des Sehnensatzes: Zieht man von einem Punkt P im Kreisäußeren zwei Sekanten (Kreisschneidende), so sind die Produkte der Strecken von P aus zu den Schnittpunkten der einen Sekante mit dem Kreis gleich den entsprechenden Produkten der anderen Sekante (Sekantensatz). Zum raumgeometrischen Beweise verwendet man ein Rotationshyperboloid, welches als eine der Quadriken in der erweiterten Fassung von Cabri 3D verfügbar ist. Auch der der Sehnentangentensatz als Grenzfall zwischen Sehnensatz und Sekantensatz lässt sich so begründen.

Beispiel 2 (Satz über den Potenzgeraden-Schnittpunkt dreier Kreise)

Vorbereitung: Punkte im Äußeren eines Kreises, von denen aus die Tangenten an diesen Kreis gleichlange Abschnitte haben, sind nach dem Sehnensatz von gleicher Potenz. Der geometrische Ort der Punkte, die bezüglich eines Kreises die gleiche Potenz haben, ist ein konzentrisch liegender Kreis.

Zwei Kreise können einander meiden, berühren oder schneiden. – Wo liegen die Punkte im Äußeren zweier Kreise, deren Tangenten an beide Kreise jeweils gleiche Tangentenabschnitte haben?

Um den betreffenden geometrischen Ort herauszufinden, schneiden wir eine Kugel mit zwei Ebenen, die eine Gerade gemein haben (Abb. 4) und erhalten die Schnittkreise k_1 und k_2 . Der Berührkreis eines Tangentenkegels von einem Punkt P dieser Geraden aus schneidet k_1 und k_2 in Punkten, die gleich der Mantellinie dieses Kegels mit der Spitze P sind. Wenn wir nun eine der Ebenen in die andere drehen, so bleiben die Tangentenabschnitte als Mantellinien von P aus an k_2 gleich und die Gerade bilden den geometrischen Ort der gesuchten Punkte (Abb. 5 aus Abb. 6 nach Ausblendung von entsprechenden Objekten und Drehung der Ebene parallel zur Bildelebene). Eine solche Gerade wird Potenzgerade der zwei Kreise genannt; sie steht senkrecht zur Verbindungsgeraden der Kreismittelpunkte M_1 und M_2 bzw. räumlich gesehen liegen M_1 und M_2 bzw. M_2' in einer Lotebene zur Potenzgeraden. In Abbildung 7 ist ein Fall zu sehen, bei dem der geometrische Ort aus der Geraden ohne die Verbindungsstrecke der Kreisschnittpunkte besteht.

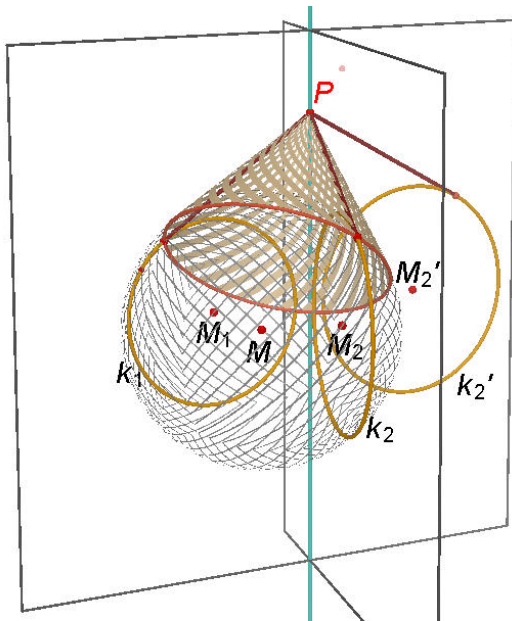


Abb. 4

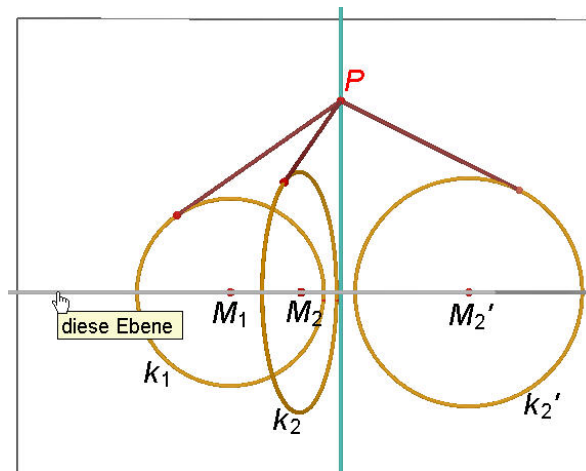


Abb. 5

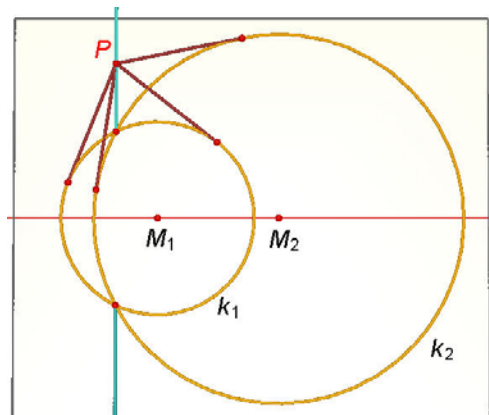


Abb. 6

Wir behaupten nun: Wenn von drei Kreisen je zwei einander schneiden, so schneiden sich die drei Potenzgeraden in einem Punkt.

Das illustrieren in den Abbildungen 7 und 8 zwei der möglichen Schnittpunkt-konfigurationen der Potenzgeraden; Schnittpunkt ist der Punkt P.

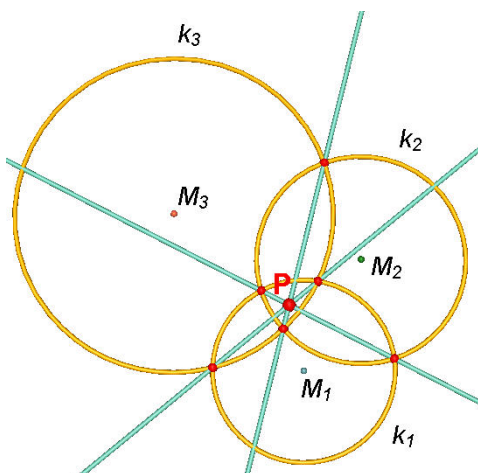


Abb. 7

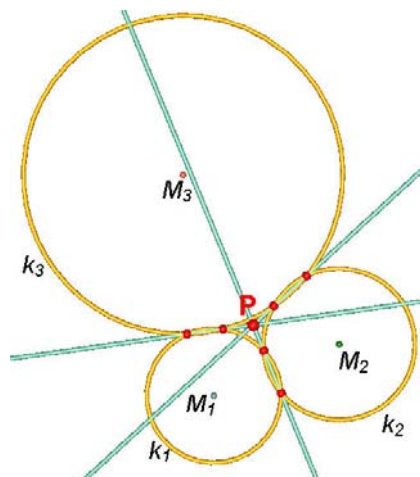


Abb. 8

Zum Beweis dieser Behauptung verräumen wir die Konfiguration in Abbildung 8, indem wir um die Kreismittelpunkte Kugeln mit den Kreisradien als Radien konstruieren (Abb. 9).

Durch die die drei Kugelmittelpunkte M_1 , M_2 , M_3 geht genau eine Ebene und die Potenzgeraden sind Spurgeraden der Potenzebenen je zweier Kugeln. Diese Potenzebenen, die durch die Schnitkreise je zweier Kugeln gebildet werden, stehen senkrecht auf der Ebene der Mittelpunkte. Dazu setzen wir voraus, dass die Schnitkreisebene zweier einander schneidender Kugeln stets senkrecht auf jeder Ebene durch die Kugelmittelpunkte steht (Abb. 10).

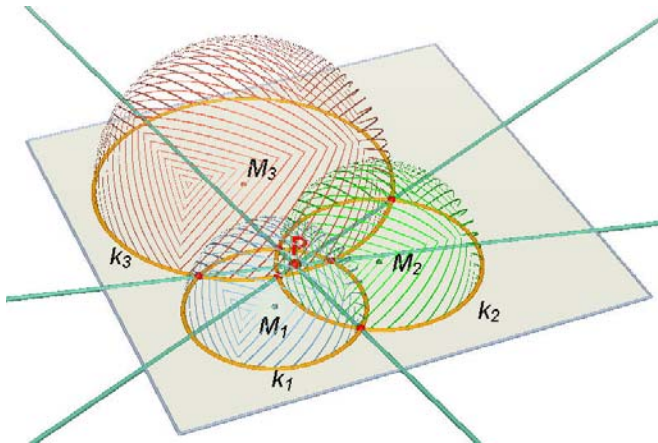


Abb. 9

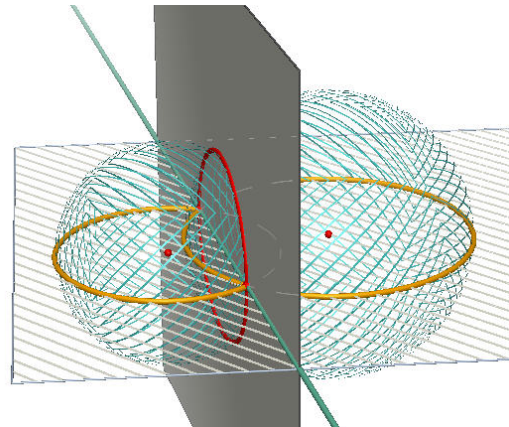


Abb. 10

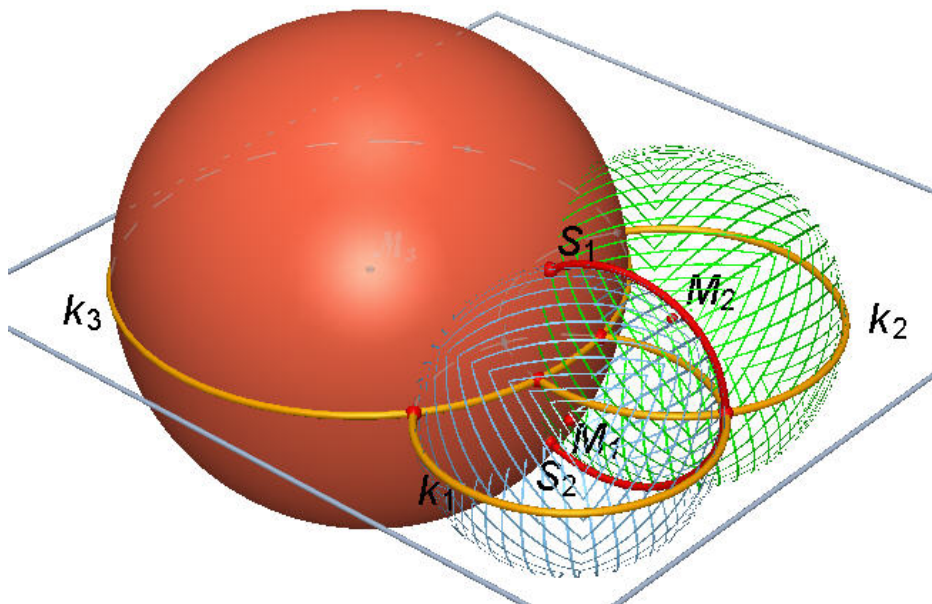


Abb. 11

Für den Fall, dass die drei Kugeln einen gemeinsamen inneren Punkt besitzen (Abb. 11), können wir folgendermaßen argumentieren: Der Schnitkreis von zwei der drei Kugeln schneidet auch die dritte Kugel und zwar in zwei Punkten. Diese zwei Schnittpunkte gehören also zu allen drei Kugeln und auch die restlichen Schnitkreise müssen durch diese Punkte gehen. Ihre Verbindungsgerade ist also Schnittgerade

der drei Potenzebenen; sie steht deshalb senkrecht auf der Ebene der Kugelmittelpunkte. Die Spuren dieser Geraden und der Potenzebenen auf der Ebene der Mittelpunkte bilden die zu beweisende Konfiguration (Abb. 12).
Wie lässt sich die Begründung im Falle anderer Konfigurationen, z. B. einer solchen wie in Abbildung 8 bzw. 13, auf die vorstehende Argumentation zurückführen?

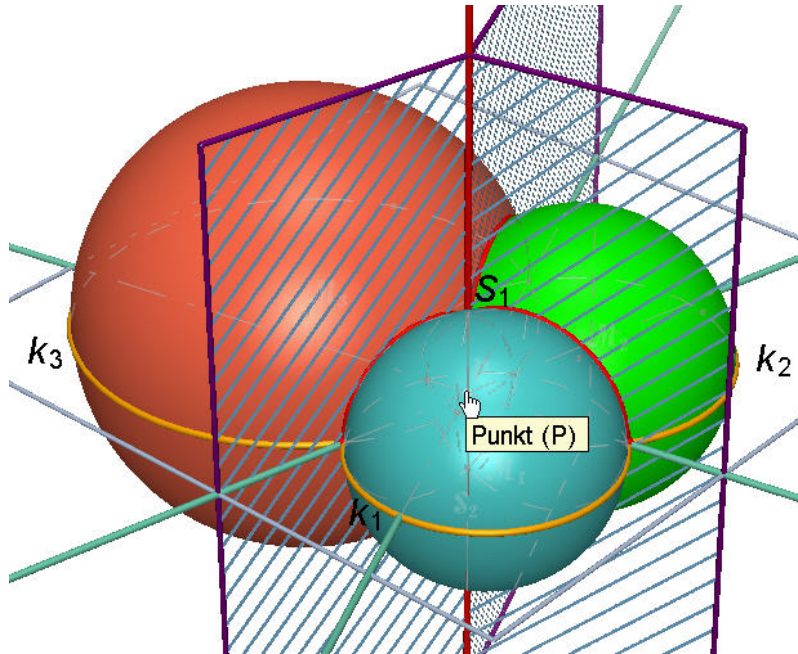


Abb. 12

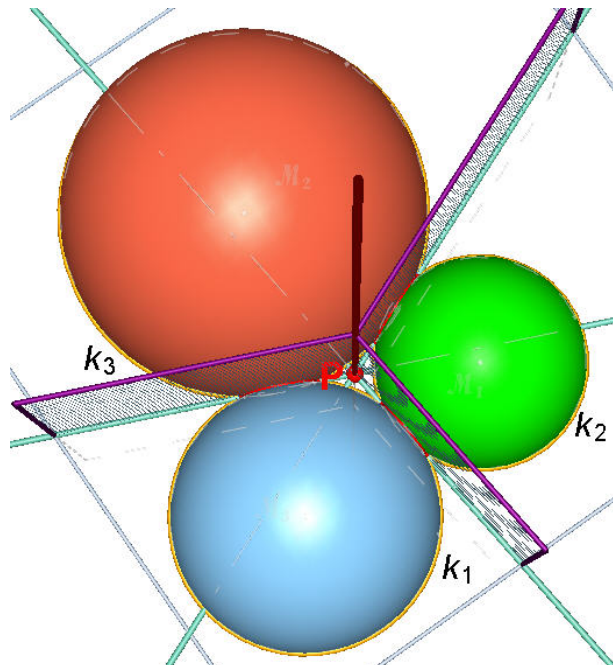


Abb. 13

Beispiel 3 (Satz über die Ähnlichkeitsachse dreier Kreise)

Paart man drei in einer Ebene liegende nicht konzentrische Kreise, so liegen die äußeren Ähnlichkeitszentren der drei Kreispaaire auf derselben Geraden, der so genannten Ähnlichkeitsachse. (D'Alembert 1717-1783)

Das illustriert die Abbildung 14 für die Kreise k_1 , k_2 , k_3 und die Ähnlichkeitszentren A_{12} , A_{23} , A_{31} , die auf der Ähnlichkeitsachse a liegen.

Zum räumlichen Beweis errichten wir über den drei Kreisen Zylinder (anstelle von Zylindern könnten wir auch Kegel verwenden), die einander ähnlich sind, die also dasselbe Verhältnis aus Radius und Höhe aufweisen, am einfachsten das Verhältnis 1 : 1 (Abb. 15 zeigt die Konstruktion des Zylinders über k_2).

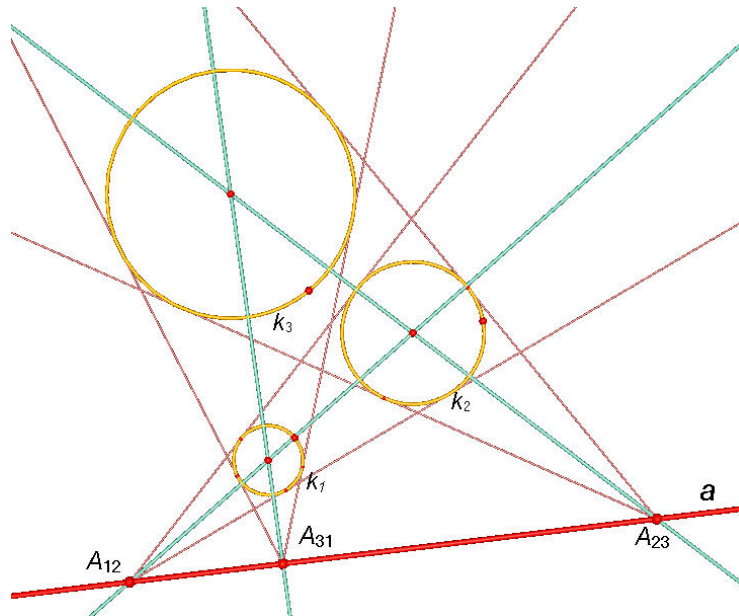


Abb. 14

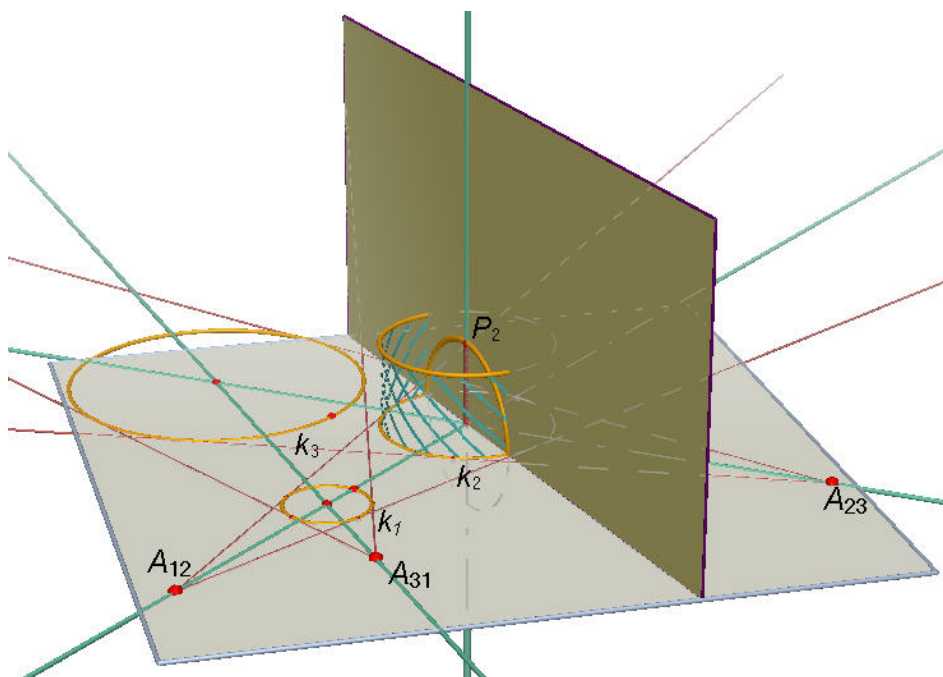


Abb. 15

Die Geraden durch die Deckkreismittelpunkte der Zylinder schneiden sich mit den entsprechenden Geraden durch die Mittelpunkte von k_1 , k_2 , k_3 in den Ähnlichkeitszentren A_{12} , A_{23} , A_{31} (Abb. 16). Wir zeigen nun, dass diese Zentren auf einer Geraden liegen. Dazu legen wir durch P_1 , P_2 , P_3 die Ebene, die die Ebene der Kreise in a schneidet (Abb. 17). A_{12} , A_{23} , A_{31} sind Schnittpunkte von Geraden, die jeweils in beiden Ebenen liegen; sie sind also Punkte der beiden Ebenen und liegen somit auf a .

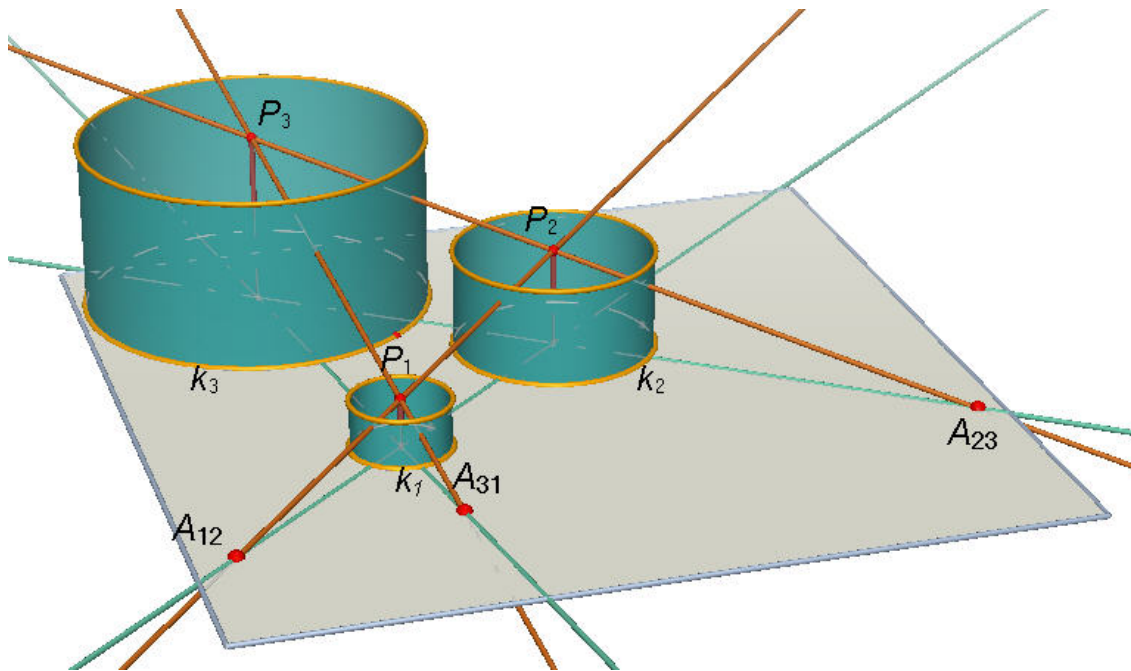


Abb. 16

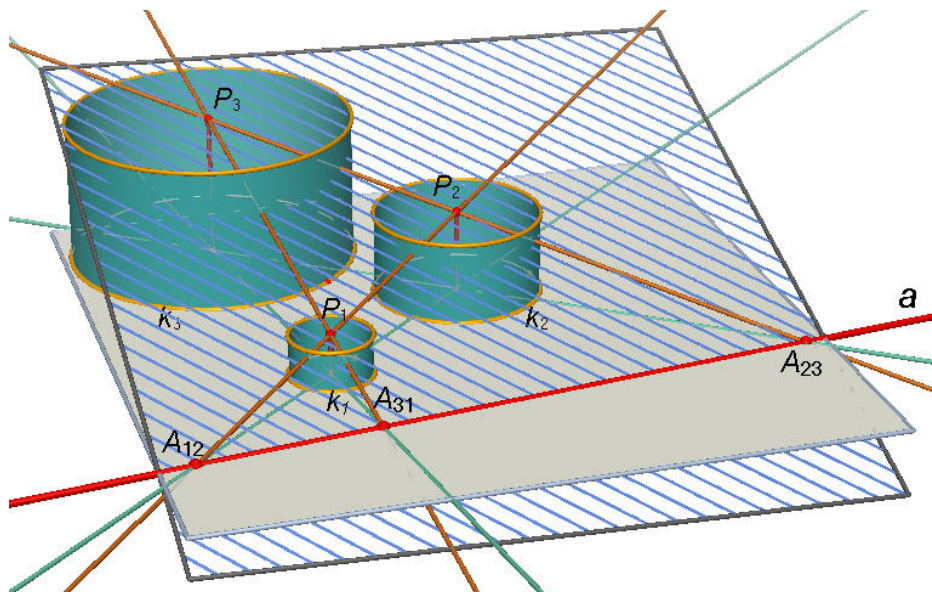


Abb. 17

Die Aussage über die Achse der Ähnlichkeitspunkte gilt auch für zwei innere Ähnlichkeitszentren und ein äußeres Ähnlichkeitszentrum (Beispiel in Abb. 18 von

unten gesehen). Zum Beweis spiegelt man einfach entsprechende Zylinder an der Ebene der Kreise.

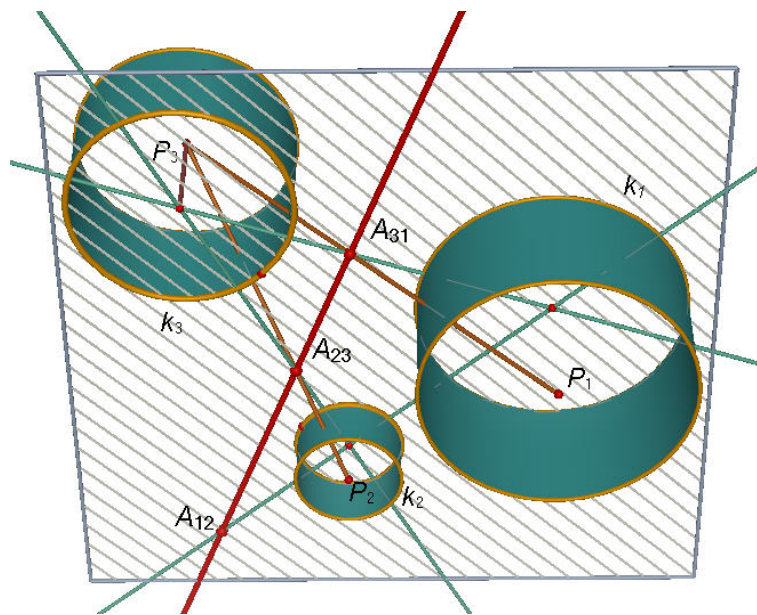


Abb. 18

Der Satz über die Ähnlichkeitsachse kann auch zu drei anderen einander ähnlichen Konfigurationen verallgemeinert werden. Zum Beweis benutzt man nur entsprechend ähnliche Zylinder.

Exkurs

Natürlich lassen sich nicht nur Sätze über Kreise raumgeometrisch beweisen. Als Beispiel für einen solchen Satz wählen wir den Satz von Desargues, der sich besonders elegant räumlich beweisen lässt.

Satz von Desargues: Liegen in der Ebene zwei Dreiecke zentralperspektiv, so sind die Schnittpunkte der Trägergeraden entsprechender Dreiecksseiten kollinear. (Gérard Desargues 1648)

Die Abbildung 19 illustriert diesen Satz für das Zentrum O und die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ mit den Trägergeradenpaaren A_1B_1, A_2B_2 ; B_1C_1, B_2C_2 ; C_1A_1, C_2A_2 , die sich in den auf derselben Geraden liegenden Punkten D, E, F schneiden.

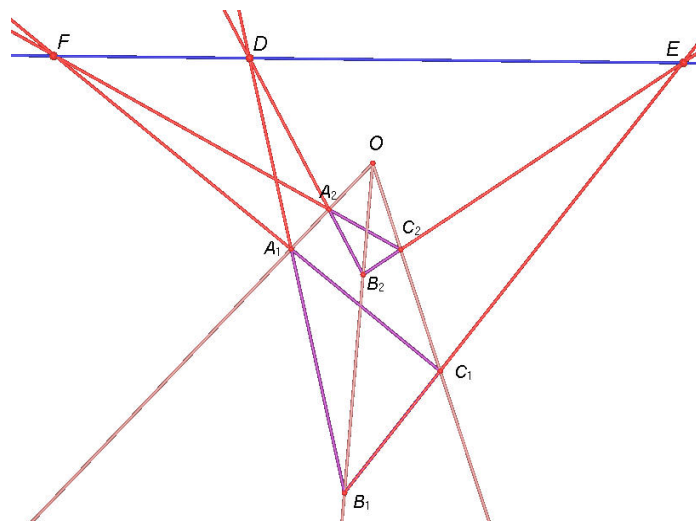


Abb. 19

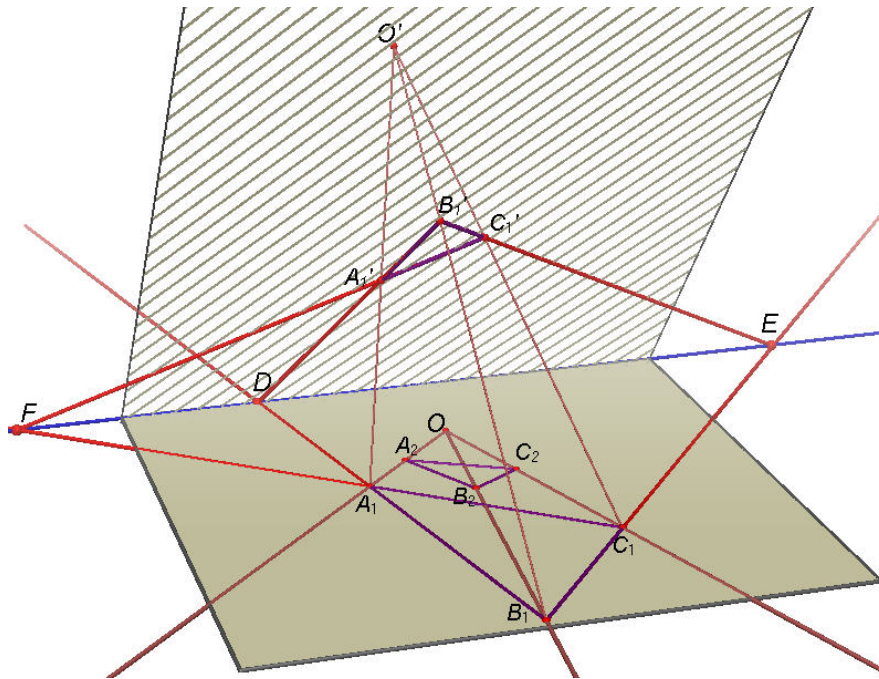


Abb. 20

Zum Beweis wählen wir ein weiteres Zentrum O' außerhalb der Ebene der Dreiecke und eine weitere nicht parallele Ebene (Bildebene). A_1B_1 , B_1C_1 , C_1A_1 schneiden die Schnittgerade beider Ebenen in den Punkten D , E , F (Abb. 20). Nun bilden wir das Dreieck $A_1B_1C_1$ von O' aus auf die Bildebene zentral perspektiv ab und erhalten das Bilddreieck $A_1'B_1'C_1'$. Die Geraden $A_1'B_1'$, $B_1'C_1'$, $C_1'A_1'$ gehen durch D , E , F , denn die Punkte der Schnittgerade der beiden Ebenen werden bei Zentralprojektion von O' auf sich abgebildet. Jetzt projizieren wir das Dreieck $A_1'B_1'C_1'$ parallel in Richtung $O'O$ auf die Ebene der Dreiecke und erhalten als Bilddreieck $A_2B_2C_2$ (Abb. 21, Abb. 22 von der Seite). Die Geraden $A_1'B_1'$, $B_1'C_1'$, $C_1'A_1'$ werden dabei auf A_2B_2 , B_2C_2 , C_2A_2 abgebildet und müssen deshalb durch D , E , F laufen.

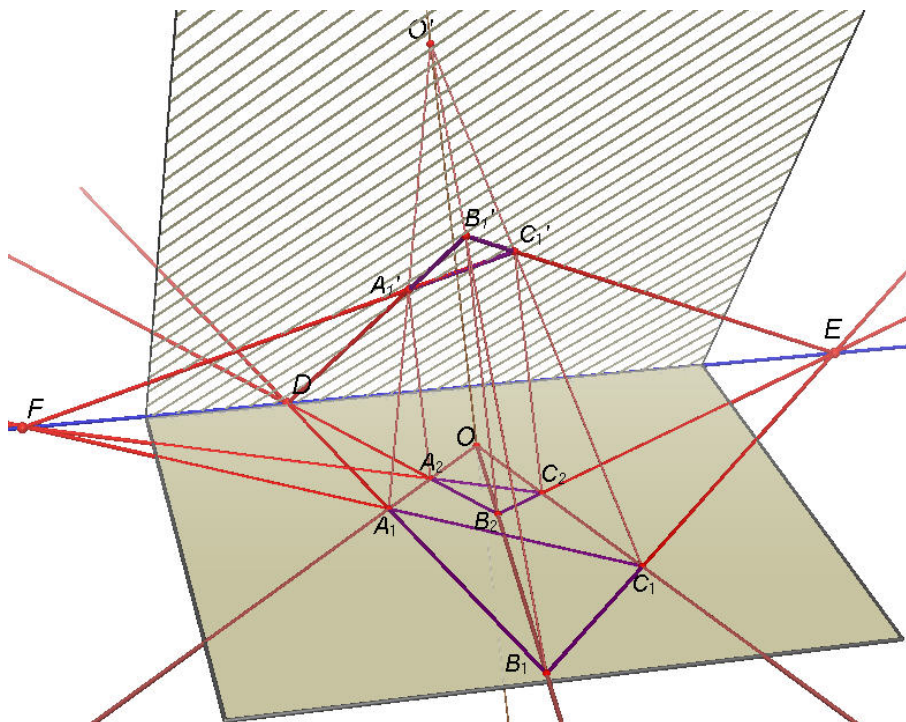


Abb. 21

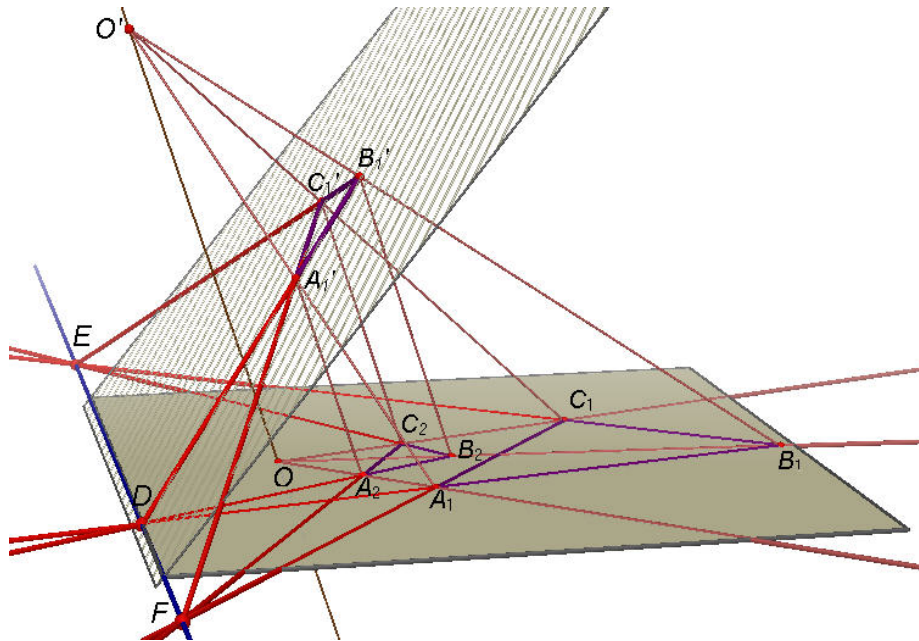


Abb. 22

Literatur

- Bubeck, H. (1994): Ein räumlicher Beweis des Sehnensatzes. In: Praxis der Mathematik PM 36, Heft 6, S. 254-256
- Dirnböck, H. (1995): Ein räumlicher Beweis des Sekantensatzes des Kreises. In: Praxis der Mathematik PM 37, Heft 4, S. 177-178
- Quaisser, E.; Sprengel, H.-J. (1989): Geometrie in Ebene und Raum. Frankfurt am Main: Harri Deutsch
- Schumann, H. (2004): Entdeckung von Analogien mit Cabri 3D am Beispiel „Dreieck – Tetraeder“. In: math. did. 27, Bd. 1, S. 82-100
- Schumann, H. (2005): Dynamische Raumgeometrie. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005
- Vásárhelyi, É. (1994): In der Ebene oder im Raum? In: Kautschitsch, H.; Metzler, W.: Anschauliche und Experimentelle Mathematik II. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften Klagenfurt, Band 22 Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, S. 261-270