Heinz Schumann

Interaktives geometrisches Konstruieren im virtuellen Raum mit Cabri 3D

Das Beherrschen der mit den entsprechenden analogen bzw. digitalen Werkzeugen ausführbaren geometrischen Konstruktionen ist neben der Beherrschung der üblichen arithmetischen, numerischen und algebraischen Algorithmen Bestandteil der Methodenkompetenz, die im Rahmen des allgemeinbildenden Mathematikunterrichts angeeignet werden soll. Die geometrischen Konstruktionen sind sowohl Gegenstand als auch Voraussetzung für Problemlösen im Geometrie-Unterricht. Die Verwendung von Dynamischen Geometrie-Systemen hat die Methode des Konstruierens in der synthetischen Geometrie der Ebene verstärkt. Aber die adäquaten räumlichen Konstruktionen waren bisher nur in der Vorstellung ausführbar; sie mussten mit den Methoden der darstellenden Geometrie auf praktikable Konstruktionen der Ebene reduziert werden. Im virtuellen Raum lässt sich nunmehr mit dem prototypischen Werkzeug Cabri 3D, das vor allem für die Schulgeometrie entworfen wurde, raumgeometrisch Konstruieren. Mit diesem Werkzeug eröffnet sich ein neuartiger Zugang zur synthetischen Raumgeometrie. Deshalb werden in diesem Beitrag Elemente einer Didaktik des interaktiven geometrischen Konstruierens im virtuellen Raum entwickelt: Klärung des Begriffs „Raumgeometrische Konstruktion“, Behandlung der raumgeometrischen Grundkonstruktionen, Übersicht über die Optionen für das raumgeometrische Konstruieren in Cabri 3D sowie ihre Anwendungen auf zahlreiche Beispiele und schließlich eine erste didaktische Bewertung.

1. Einleitung

Raumgeometrisches Konstruieren im Kontext der synthetischen Raumgeometrie, die seit Euklid mathematischer Gegenstand und auch schulischer Unterrichtsgegenstand ist, war bisher nur in der Vorstellung möglich. Jede reale Konstruktionsausführung bedurfte einer weiteren Konstruktion, nämlich einer ebenen zeichnerischen Darstellung und Lösung des raumgeometrischen Problems (vgl. Diagramm 1) – meist in einer die Raumvorstellung unterstützenden parallelprojektiven Darstellung.

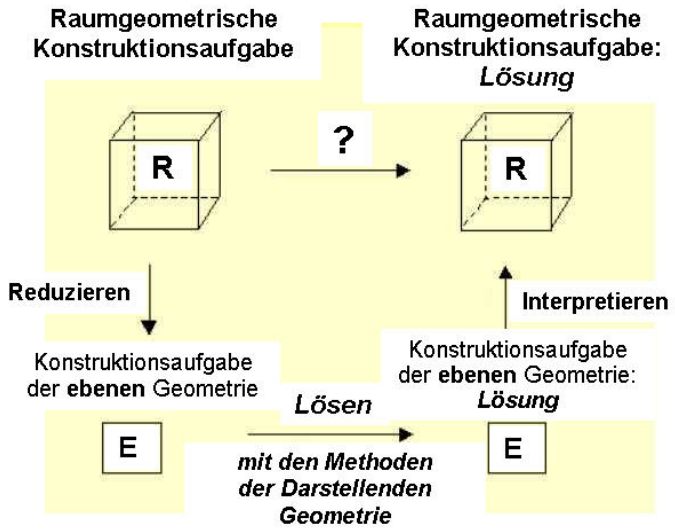


Diagramm 1 **Raumgeometrische Konstruktionsaufgaben traditionell**

Es ist deshalb verständlich, dass raumgeometrisches Konstruieren wegen dieses Darstellungsproblems für die Schüler und Schülerinnen nur schwer zugänglich gewe-

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

sen ist und deshalb wenig Berücksichtigung in den allgemeinbildenden Curricula gefunden hat. Müssen die Schüler und Schülerinnen doch mehr oder weniger gewisse Methoden der Darstellenden Geometrie (vgl. u. a. Graf/Barner 1964) beherrschen lernen, um überhaupt eine raumgeometrische Konstruktionsaufgabe lösen zu können. Abgesehen von den dabei zu erbringenden Raumvorstellungsleistungen behindert das Darstellungsproblem die zeichnerisch-konstruktive Behandlung der synthetischen Raumgeometrie wie es den Schülern und Schülerinnen von der ebenen synthetischen Geometrie her kennen. – Die aufwändigen und problematisch zu verwaltenden dreidimensionalen physischen Modelle von räumlichen Konstruktionsaufgaben und ihren Lösungen bleiben im Allgemeinen auf sehr einfache Beispiele beschränkt. Ihr Vorteil beruht aber in der ganzheitlichen Wahrnehmung.
Die Lösung des Problems besteht im interaktiven Konstruieren in einem dafür geschaffenen virtuellen Raum mit einem geometrisch-inhaltlich und software-ergonomisch geeigneten Tool, das die Raumvorstellung unterstützt (vgl. Diagramm 2). In branchenspezifischen 3D-CAD-Systemen ist diese Art des Konstruierens schon seit einiger Zeit üblich. Schüler und Schülerinnen, die in den gegenständlichen virtuellen Räumen von 3D-Computerspielen agieren, haben entsprechende Vorerfahrungen – und sicherlich keine Berührungsängste. Natürlich müssen zur Nutzung des Tools raumgeometrische Vorkenntnisse verfügbar gemacht werden, z. B. durch erläuternde Demonstrationen mit dem Tool durch eine kompetente Lehrkraft.

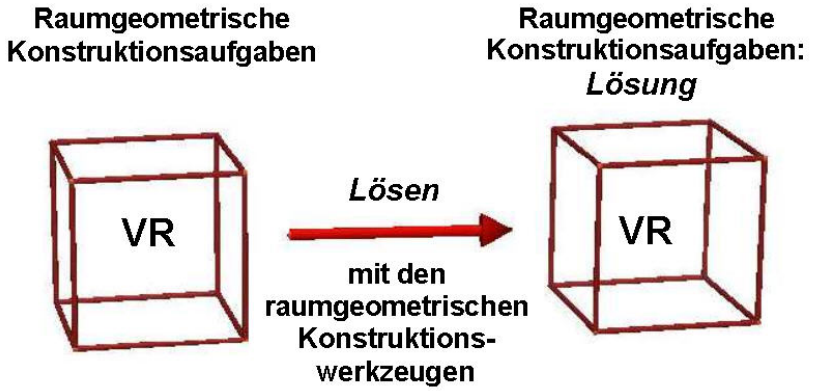


Diagramm 2 **Raumgeometrische Konstruktionsaufgaben im virtuellen Raum**

Unter dem virtuellen Raum verstehen wir hier eine geeignete Parallel- oder Zentralprojektion des systemintern in „Weltkoordinaten“ repräsentierten dreidimensionalen reell-euklidischen Raumes bzw. eines würfelförmigen Ausschnitts desselben auf die Bildschirmebene (die Darstellende Geometrie ist also unter der Oberfläche versteckt!). Dieser virtuelle Raum hat räumliche Wahrnehmungsqualität. Mit dem dynamischen Raumgeometrie-System Cabri 3D in der Version 1.0 steht uns ein Werkzeug zur Verfügung, mit dem wir u. a.

- raumgeometrische Konstruktionen in der „Tiefe“ des Bildschirms ausführen,
- raumgeometrische Konfigurationen visualisieren, indem wir diese mit reichhaltigen Objektattributen gestalten und mit dem *Virtual Sphere Device*, der Einbettung von Konfigurationen in eine direkt referenzierbare Kugel, von allen Seiten anschauen,
- raumgeometrische Konfigurationen durch Verziehen variieren, wie wir es schon von den ebenen dynamischen Geometrie-Systemen her gewohnt sind.

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

Im folgenden Abschnitt klären wir, was unter raumgeometrischen Konstruktionen zu verstehen ist. Im 3. Abschnitt werden die wesentlichen Optionen für raumgeometrische Konstruktionen in Cabri 3D vorgestellt und beispielgebend einige Konstruktionsaufgaben mit Cabri 3D gelöst. Mit einer didaktischen Bewertung schließen wir ab.

2. Raumgeometrische Konstruktionen

Im Gegensatz zu den ebenen geometrischen Konstruktionen, die aus mathematischer Sicht in dem Standardwerk „Theorie der geometrischen Konstruktionen“ (Bieberbach 1952) und in didaktischer Sicht z. B. im „Handbuch der Schulmathematik“ (Wolff et al. 1966) sowie mit Berücksichtigung der Computernutzung u. a. in „Geometrie für die Sekundarstufe“ (Holland 1996) und in „Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer“ (Schumann 1991) behandelt werden, findet sich nur in „Geometrie in Ebene und Raum“ (Quaisser/Sprengel 1989) eine systematische Darstellung der raumgeometrischen Konstruktionen – soweit der Autor in der deutschsprachigen Literatur fündig geworden ist. Dieser Mangel an mathematischer und didaktischer Theorie-Entwicklung für die raumgeometrischen Konstruktionen erklärt sich aus ihrer fehlenden Praktikabilität.
Wir geben im folgenden eine redundante Auflistung der elementaren Konstruktionen. Dabei gehen wir nicht auf die den Konstruktionen zu Grunde liegenden Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen ein; außerdem diskutieren wir keine Sonderfälle. Cabri 3D wird bereits hier – dem Abschnitt 3 vorgreifend – zur computergrafischen Illustration bzw. zur computergrafischen Modellierung der Konstruktionen verwendet (die im Original farbigen Abbildungen erleiden in der Wiedergabe als Graustufenbilder einen gewissen Abmangel an Anschauungsqualität!).
Wir denken uns einen „Konstruktionsraum“ als ein Modell des reellen euklidischen Raumes in synthetischer Interpretation. In Cabri 3D ist dieser Raum beschränkt auf einen würfelförmigen Ausschnitt, an dessem Rand die im Würfeläußeren liegenden Objektteile geklippt, d. h. abgeschitten werden (eine Ebene z. B. kann deswegen erscheinen als besonderes Sechseck, Fünfeck, Trapez, Parallelogramm, Rechteck, Quadrat oder Dreieck). In diesem Raum können wir endlich viele Punkte auswählen bzw. erzeugen, mit denen die folgenden **räumlichen** Konstruktionen ausführbar sind:

(1) Die Konstruktion einer Geraden durch zwei verschiedene Punkte.
(Konstruktion einer Verbindungsgeraden mittels Geraden-Lineal)

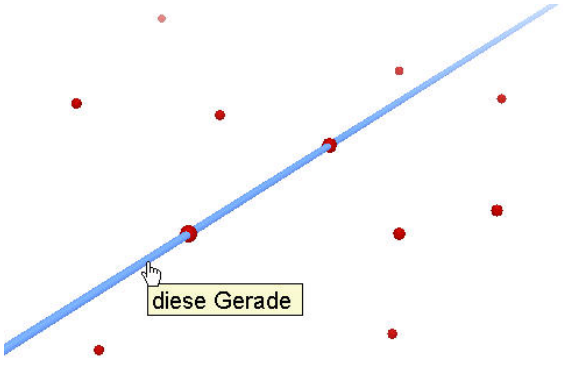


Abb. 1 Gerade durch zwei Punkte

(2) Die Konstruktion einer Ebene durch drei nicht auf einer Geraden liegender Punkte.

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

(Konstruktion einer Verbindungsebene mittels Ebenen-Lineal)

(3) Die Konstruktion einer Kugel um einen Punkt als Mittelpunkt durch einen von diesem verschiedenen Punkt als Kugelpunkt.
(Konstruktion einer Kugel mittels Kugel-Zirkel).

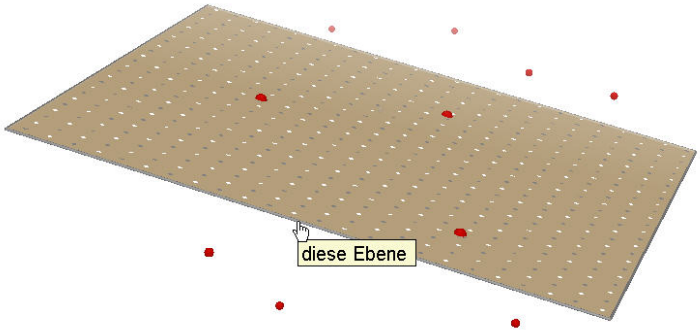


Abb. 2 Ebene durch drei Punkte

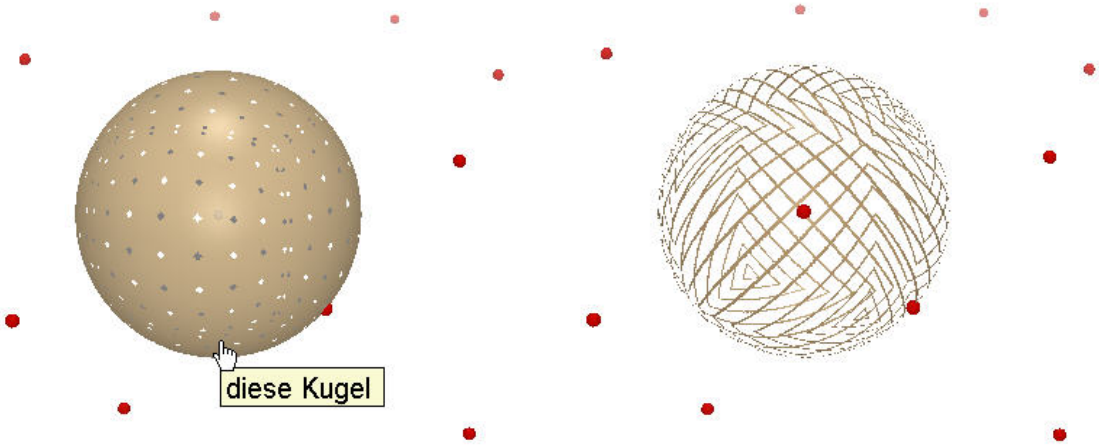


Abb. 3.1 Kugel aus Mittel- und Kugelpunkt Abb. 3.2 wie Abb. 3.1 nur schraffiert

Mit den folgenden Konstruktionen werden neue Punkte als Schnittobjekte im Konstruktionsraum erzeugt:

(4) Die Konstruktion des Schnittpunkts einer Geraden mit einer Ebene, zu der die Gerade nicht parallel ist.
(Konstruktion Durchstoßpunkt Gerade mit Ebene)

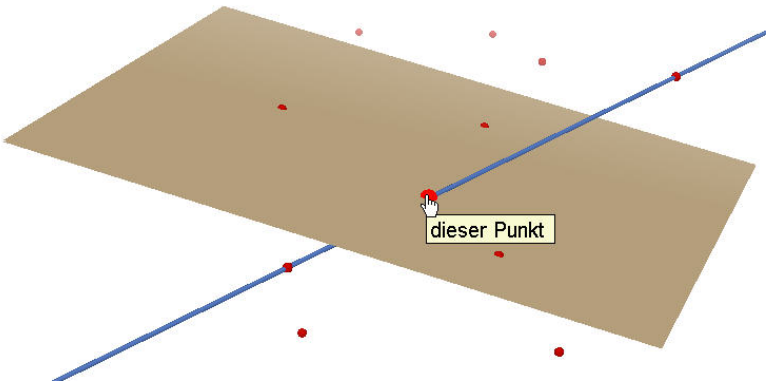


Abb. 4 Durchstoßpunkt Gerade mit Ebene

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

(5) Die Konstruktion der Schnittpunkte von einer Gerade mit einer Kugel.
(Konstruktion Durchstoßpunkte Gerade mit Kugel)

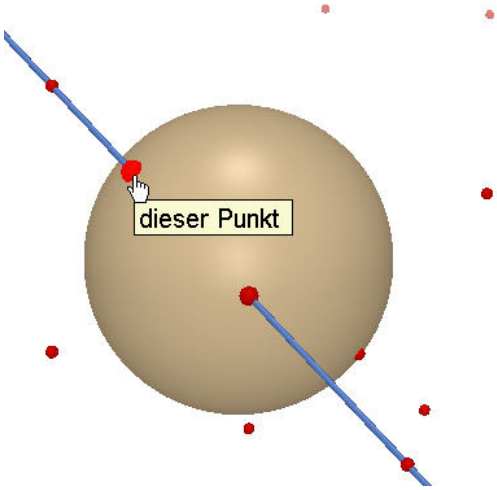


Abb. 5.1 Schnittpunkte Gerade mit Kugel

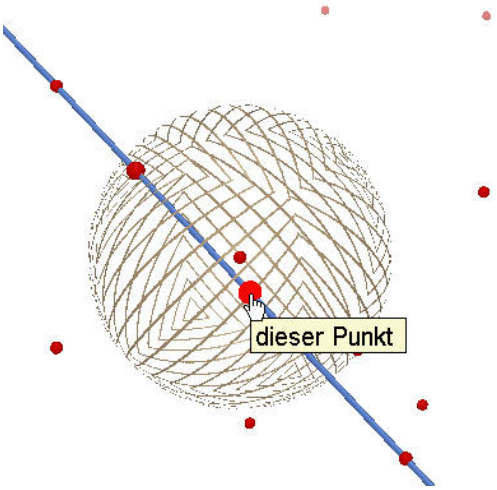


Abb. 5.2 wie Abb. 5.1 nur schraffiert

(6) Die Konstruktionen der Schnittgeraden zweier nichtparalleler Ebenen.
(Konstruktion Schnittgerade Ebene mit Ebene)

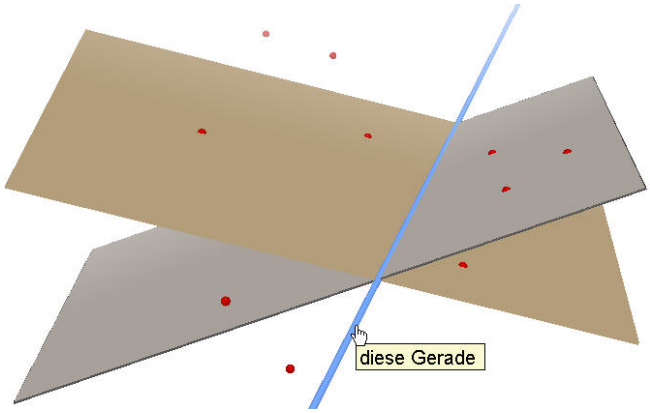


Abb. 6 Schnittgerade zweier Ebenen

(7) Die Konstruktion des Schnittkreises von einer Ebene mit einer Kugel.
(Konstruktion Schnittkreis Ebene mit Kugel)

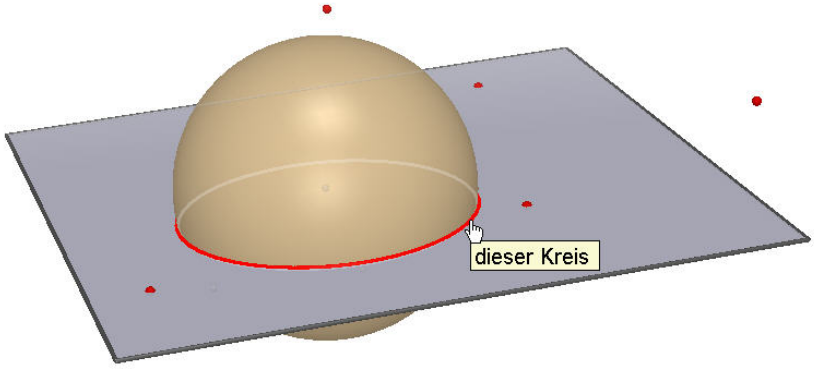


Abb. 7 Schnittkreis von Ebene mit Kugel

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

(8) Die Konstruktion des Schnittkreises von einer Kugel mit einer Kugel.
(Konstruktion Schnittkreis Kugel mit Kugel)

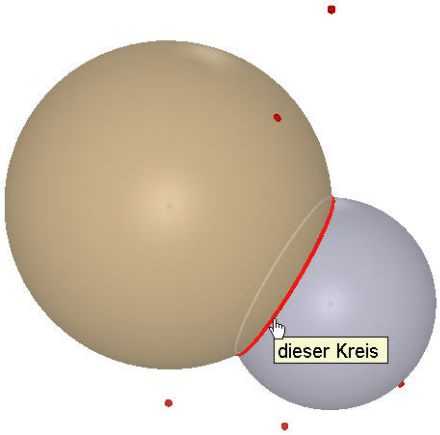


Abb. 8.1 Schnittkreis von Kugel mit Kugel

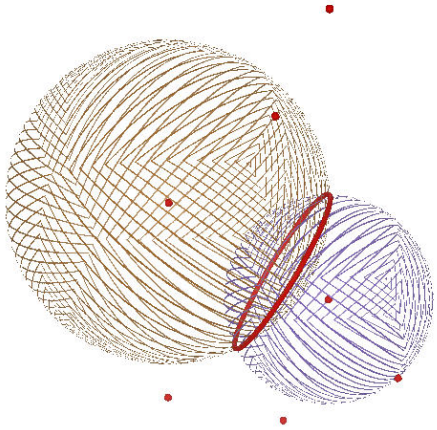


Abb. 8.2 wie Abb. 8.1 nur schraffiert

Auf den konstruierten Objekten können endlich viele Punkte als Hilfspunkte für weitere Konstruktionen ausgewählt bzw. erzeugt werden.

In jeder vorgegebenen bzw. konstruierten Ebene des Raumes können endlich viele Punkte erzeugt bzw. ausgewählt werden, um die folgenden **ebenen** Konstruktionen auszuführen:

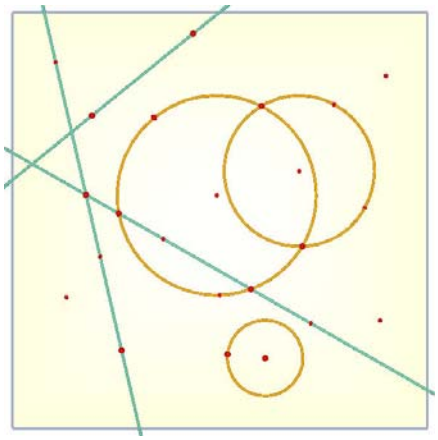
(9) Die Konstruktion einer Geraden durch zwei verschiedene Punkte.
(Konstruktion Verbindungsgerade in einer Ebene mittels Geraden-Lineal)

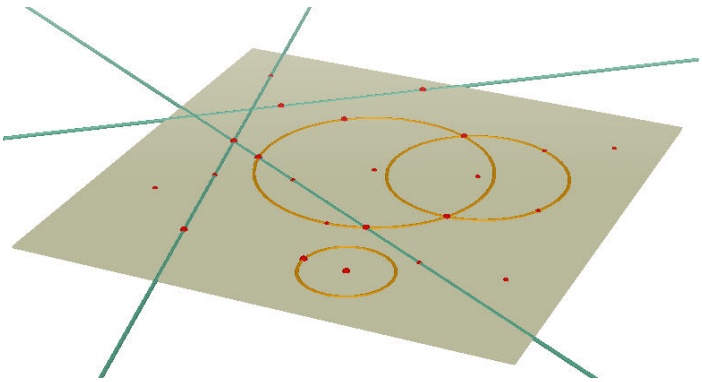
(10) Die Konstruktion eines Kreises um einen Punkt als Mittelpunkt durch einen von diesem verschiedenen Punkt als Kreispunkt.
(Konstruktion eines Kreises mittels Kreis-Zirkel)

(11) Die Konstruktion des Schnittpunktes einer Geraden mit einer nichtparallelen Geraden.
(Konstruktion Geradenschnittpunkt)

(12) Die Konstruktion der Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis.
(Konstruktion Schnittpunkte Gerade mit Kreis)

(13) Die Konstruktion der Schnittpunkte eines Kreises mit einem Kreis.
(Konstruktion Schnittpunkte Kreis mit Kreis).





© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

Abb. 9.1 Ebene elementare Konstruktionen Abb. 9.2 wie Abb. 9.1 nur in den Raum gedreht
Auf den konstruierten ebenen Objekten können ebenfalls endlich viele Punkte als Hilfspunkte für weitere Konstruktionen ausgewählt bzw. erzeugt werden.

Das Lösen einer mit Zirkel (Kreis- bzw. Kugel-Zirkel) und Lineal (Geraden- bzw. Ebenen-Lineal) ausführbaren Konstruktionsaufgabe besteht in der Anwendung endlich vieler der Konstruktionsschritte (1) – (13) auf die in der Aufgabe gegebenen Objekte, um gesuchte Punkte als Schnittpunkte geometrischen Örter (Geraden, Ebenen, Kugeln) zu konstruieren. Diese Lösungsmethode ist deshalb als **„Methode der raumgeometrischen Örter“** zu bezeichnen.

Anmerkung: Neben der vor allem heuristischen Frage, wie eine bestimmte Konstruktionsaufgabe mit den hier vorgegebenen Konstruktionswerkzeugen gelöst werden kann, stellt sich die Frage nach der Charakterisierung solcher Aufgaben, die sich mit diesen Konstruktionsinstrumenten (theoretisch) lösen lassen. Durch analytisch-geometrische Beschreibung der Lösung einer betreffenden Konstruktionsaufgabe mittels der zugelassenen Werkzeuge in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem gewinnt man die analytische Abhängigkeit der Koordinaten der gesuchten von den Koordinaten der gegebenen Punkte, durch die auch andere gegebene Objekte analytisch beschrieben werden können. Die Terme für die Koordinaten der gesuchten Punkte bestehen möglicherweise wegen des Schneidens von Objekten mit Kreisen bzw. Kugeln aus Quadratwurzeltermen der Koordinaten der gegebenen Punkte. Man versteht darunter Terme, die aus den Koordinaten der gegebenen Punkte durch die vier Grundrechenarten und das Quadratwurzelziehen gebildet werden. Nur für solche raumgeometrischen Aufgabenstellungen, bei denen diese Art der Koordinatendarstellung nachweisbar ist, existiert eine Lösung mit dem zulässigen Werkzeugsatz.

Zur Vereinfachung des Lösens von Konstruktionsaufgaben dienen die sogenannten **Grundkonstruktionen**. Diese lassen sich auf die elementaren Konstruktionen zurückführen.
In einer Konstruktionsebene können mittels den elementaren Konstruktionen (9) – (13) und auch anderer Grundkonstruktionen folgende konstruktiven Module ausgeführt werden:

Mittelsenkrechte Gerade zu zwei Punkten konstruieren
Mittelpunkt zweier Punkte konstruieren
Lotgerade von einem Punkt zu einer Geraden konstruieren (Lot-Errichten)
Lotgerade in einem Punkt einer Geraden zu dieser Geraden konstruieren (Lot-Fällen)
Parallele Gerade durch eine Punkt zu einer Geraden konstruieren
Winkelhalbierende konstruieren
Kreis aus drei Punkten konstruieren
...

Im Konstruktionsraum kommen mit den elementaren Konstruktionen (1) – (8) ausführbare Grundkonstruktionen hinzu:

Ebene aus Punkt und Gerade konstruieren

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

Ebene aus zwei nicht windschiefen Geraden konstruieren
Schnittpunkt dreier Ebenen konstruieren
Mittelsenkrechte Ebene zu zwei Punkten konstruieren
Mittelpunkt zweier Punkte konstruieren
Lotgerade in einem Punkt der Ebene zu dieser Ebene konstruieren (Lot-Errichten)
Lotgerade von einem Punkt zu einer Ebene konstruieren (Lot-Fällen)
Parallele Ebene durch einen Punkt zu einer Ebene konstruieren
Lotebene durch einen Punkt zu einer Geraden konstruieren
Kreis um eine Achse durch einen Kreispunkt konstruieren
Winkelhalbierende Ebene zwischen zwei (Halb-)Ebenen konstruieren
Kugel aus vier Punkten konstruieren
Schnittpunkte zweier Kreise in räumlicher Lage konstruieren
Schnittpunkte dreier Kugeln konstruieren
...

Im folgenden illustrieren und erkären wir diese Grundkonstruktionen.

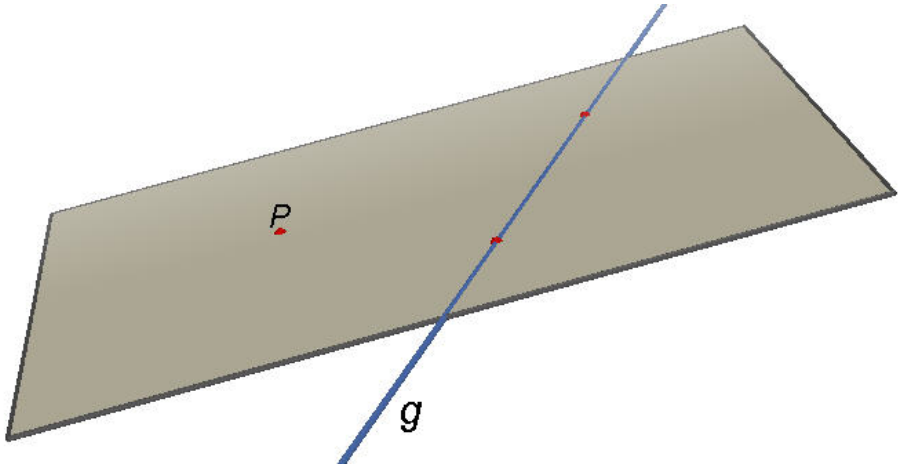


Abb. 10 Ebene aus Punkt und Gerade

Konstruktion „Ebene aus Punkt und Gerade“: Wir legen auf der Geraden zwei Punkte fest. Nach (2) kann man durch drei Punkte eine Ebene legen.

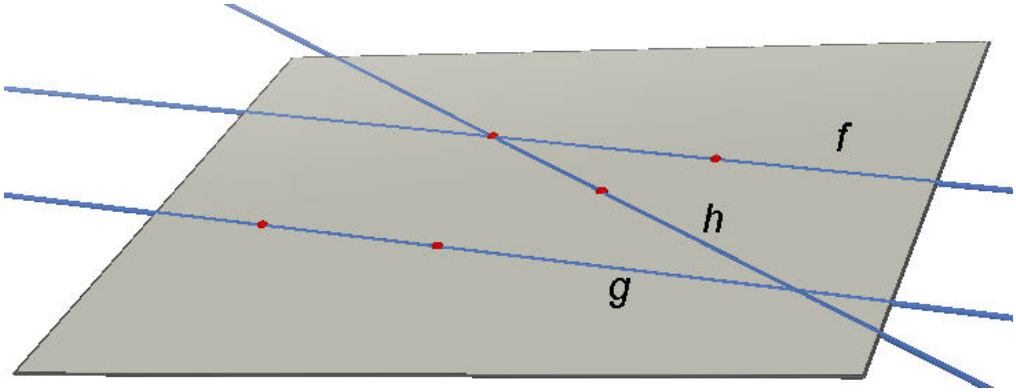


Abb. 11 Ebene aus zwei nicht windschiefen Geraden

Konstruktion „Ebene aus zwei nicht windschiefen Geraden“: Nicht windschiefe Geraden liegen in einer Ebene. Nach Wahl entsprechender Hilfspunkte auf Geraden

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

kann nach (2) sowohl für einander schneidende als auch für parallele Geraden eine sie enthaltende Ebene konstruiert werden.

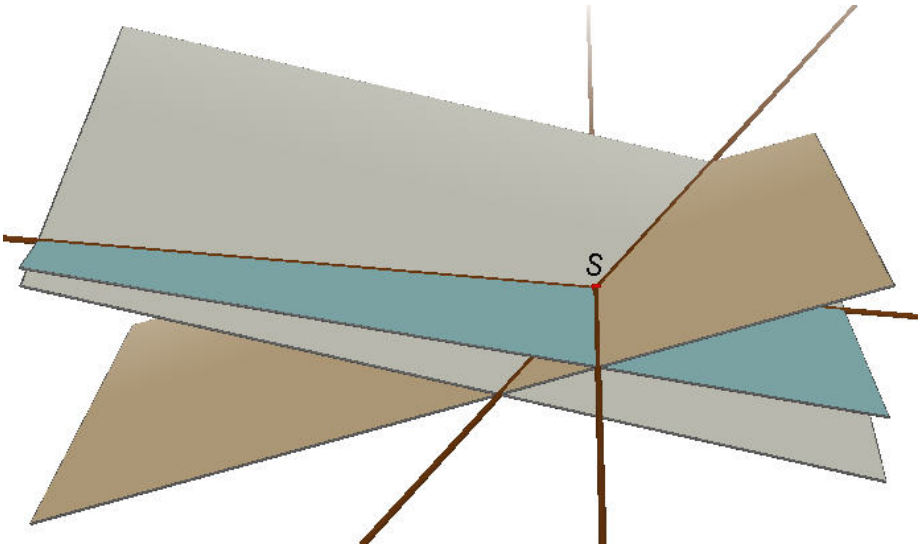


Abb. 12 Schnittpunkt dreier Ebenen

Konstruktion „Schnittpunkt dreier Ebenen“: Zu je zwei der drei Ebenen konstruiert man nach (6) die Schnittgerade. Zu je zwei dieser Schnittgeraden wird nach (11) ein Schnittpunkt konstruiert. Diese Schnittpunkte fallen zusammen mit dem Punkt, der den drei Ebenen gemein ist.

Unter den folgenden raumgeometrischen Grundkonstruktionen sind mehrere analog den entsprechenden Kreiszirkel- und Geradenlinealkonstruktionen ausführbare.

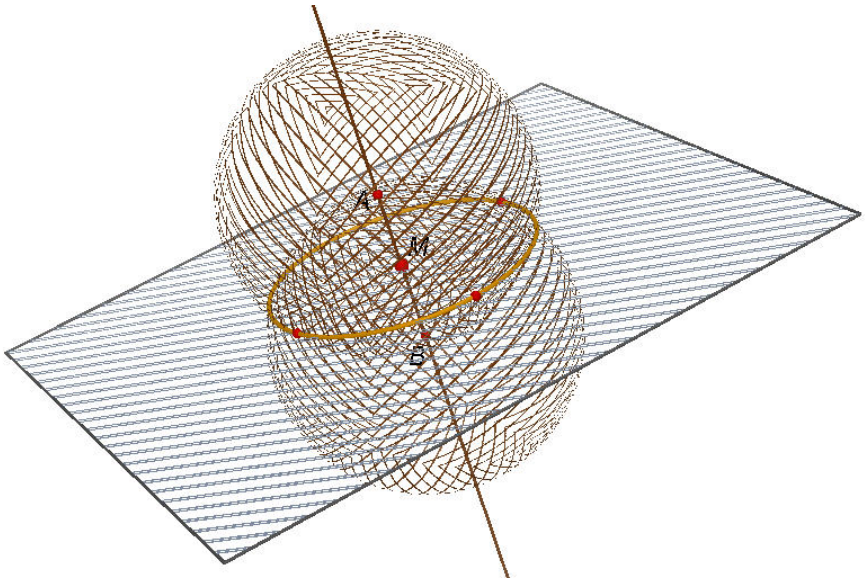


Abb. 13 Mittelsenkrechte Ebene zu zwei Punkten

Konstruktion „Mittelsenkrechte Ebene zu zwei Punkten“: Gegeben sind zwei Punkte. Wir konstruieren nach (3) zwei Kugeln, jeweils um einen der Punkte durch den anderen. Zu den beiden Kugeln konstruieren wir nach (8) den Schnittkreis, zu

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

dem nach (2) die gesuchte Ebene konstruiert werden kann. Der Schnittpunkt von Ebene und Verbindungsgerade der zwei Punkte ist ihr **Mittelpunkt**.

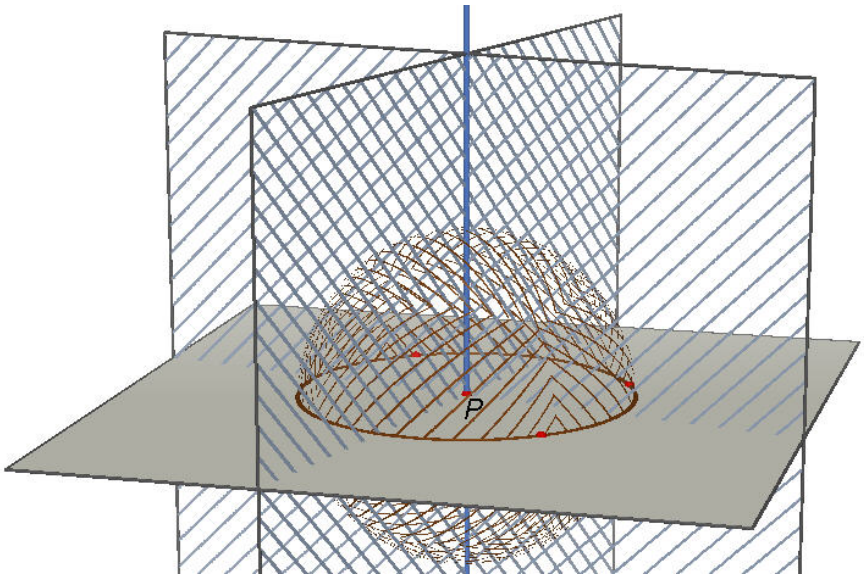


Abb. 14 Lotgerade in einem Punkt der Ebene zu dieser Ebene

Konstruktion „Lotgerade in einem Punkt der Ebene zu dieser Ebene“ (Lot-Errichten): Wir konstruieren nach (3) um den gegebenen Punkt durch einen weiteren beliebig gewählten Punkt eine Kugel. Der Schnittkreis dieser Kugel mit der Ebene wird nach (7) konstruiert. Die Schnittgerade zweier mittelsenkrechter Ebenen zu Kreispunkten liefert nach (6) das gesuchte Lot.

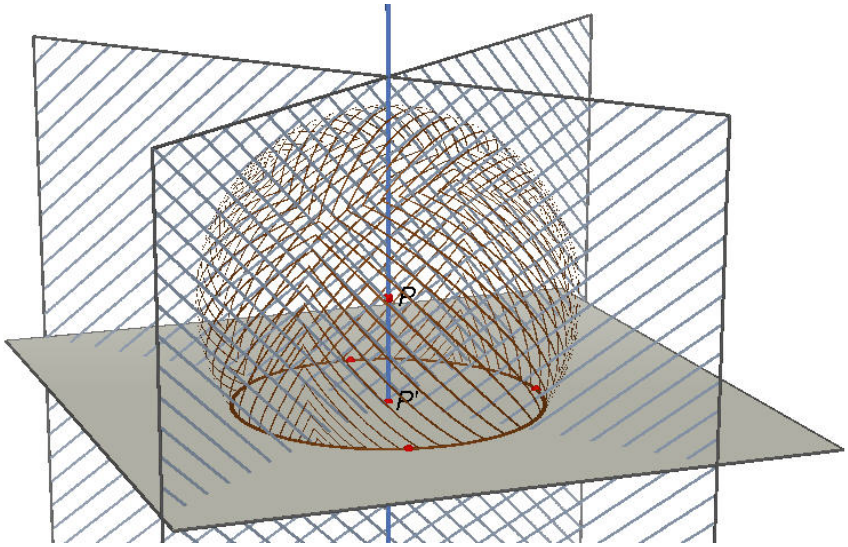


Abb. 15 Lotgerade von einem Punkt zu einer Ebene

Konstruktion „Lotgerade von einem Punkt zu einer Ebene“ (Lot-Fällen): Wir konstruieren nach (3) eine Kugel um den gegebenen Punkt durch einen Punkt der gegebenen Ebene. Aus Punkten auf dem nach (7) konstruierten Schnittkreis werden

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

zwei mittelsenkrechte Ebenen konstruiert, deren Schnittgerade nach (6) das gesuchte Lot ist.

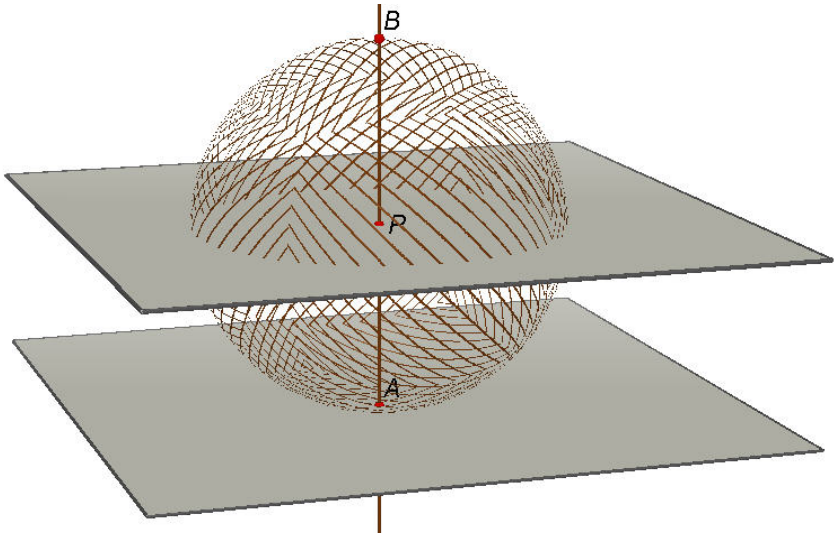


Abb. 16 Parallele Ebene durch einen Punkt zu einer Ebene

Konstruktion „Parallele Ebene durch einen Punkt zu einer Ebene“: Wir fällen das Lot vom gegebenen Punkt auf die Ebene. Den Lotfußpunkt erhält man nach (5). Die nach (3) um den gegebenen Punkt durch den Lotfußpunkt konstruierte Kugel wird nach (5) vom Lot in einem weiteren Punkt geschnitten. Die gesuchte parallele Ebene erhält man als mittelsenkrechte Ebene aus diesem Punkt und dem Lotfußpunkt.

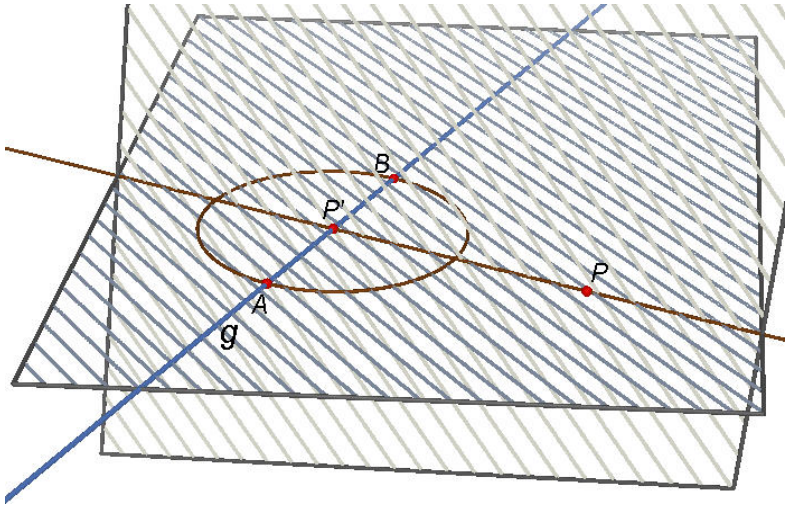


Abb. 17 Lotebene durch einen Punkt zu einer Geraden

Konstruktion „Lotebene durch einen Punkt zu einer Geraden“: Zuerst wird die Verbindungsebene aus dem gegebenem Punkt und der gegebenen Geraden konstruiert. Dann fällen wir in dieser Ebene das Lot von dem gegebenen Punkt auf

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

die Gerade. Die Lotebene ergibt sich als mittelsenkrechte Ebene der Schnittpunkte des Kreises um den Lotfußpunkt mit der gegebenen Geraden.

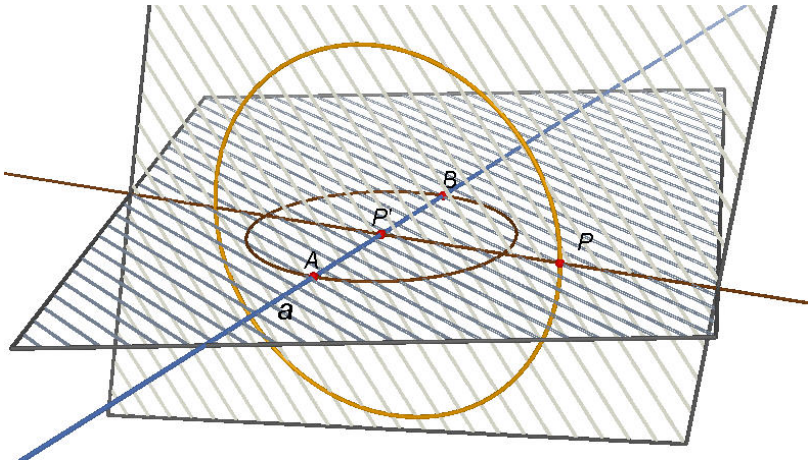


Abb. 18 Kreis um eine Achse durch einen Punkt

Konstruktion „Kreis um eine Achse durch einen Punkt“: Wir ergänzen die vorstehende Grundkonstruktion, indem wir in der mittelsenkrechten Ebene um den Lotfußpunkt einen Kreis durch den gegebenen Punkt konstruieren.

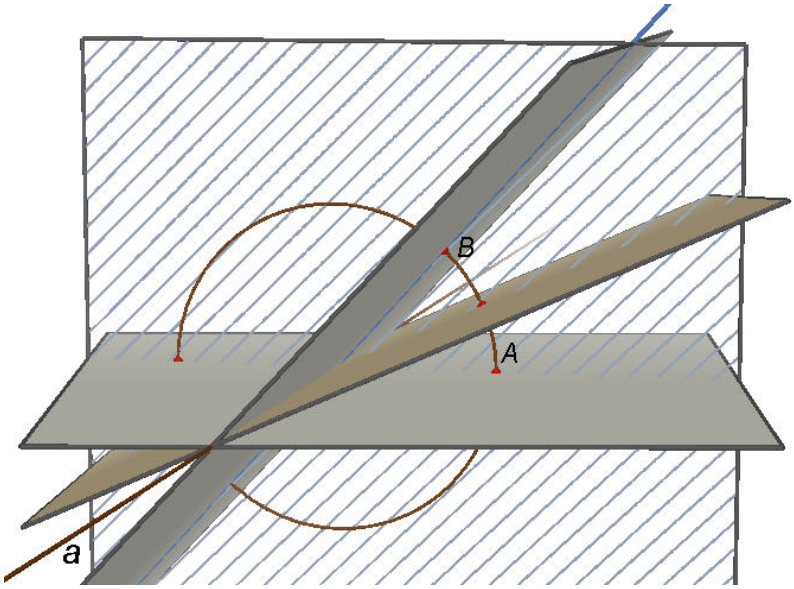


Abb. 19 Winkelhalbierende Ebene zwischen zwei (Halb-)Ebenen

Konstruktion „Winkelhalbierende Ebene zwischen zwei (Halb-)Ebenen“: Wir beginnen mit der Konstruktion der Schnittgeraden der beiden Ebenen nach (6). Um diese Gerade als Achse konstruiert man einen Kreis durch einen beliebigen Punkt in einer der gegebenen Ebenen. Die Kreisebene schneidet die andere Ebene in einer Geraden. Die mittelsenkrechte Ebene aus dem Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Kreis und dem ursprünglichen Kreispunkt ist die winkelhalbierende Ebene.

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

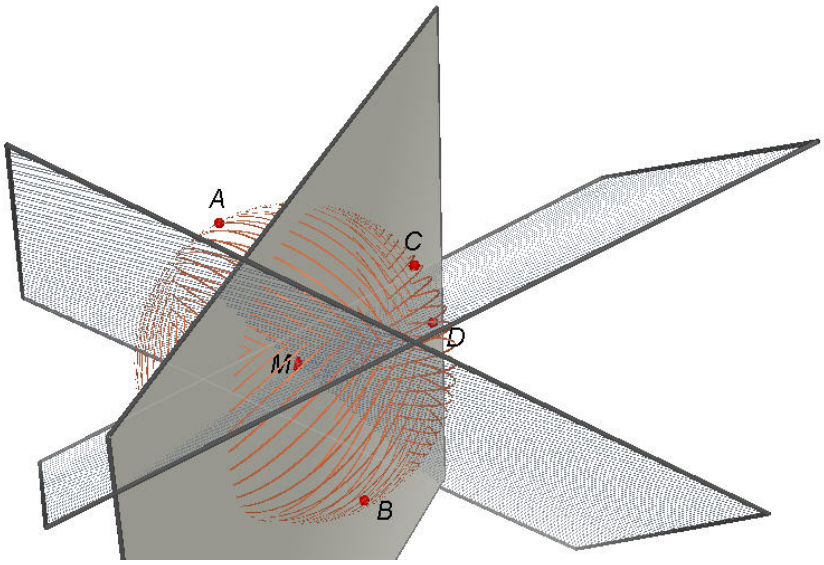


Abb. 20 Kugel aus vier Punkten

Konstruktion „Kugel aus vier Punkten“: Der Schnittpunkt dreier mittelsenkrechter Ebenen, die man wahlweise aus je zwei von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten konstruiert, ist der Kugelmittelpunkt.

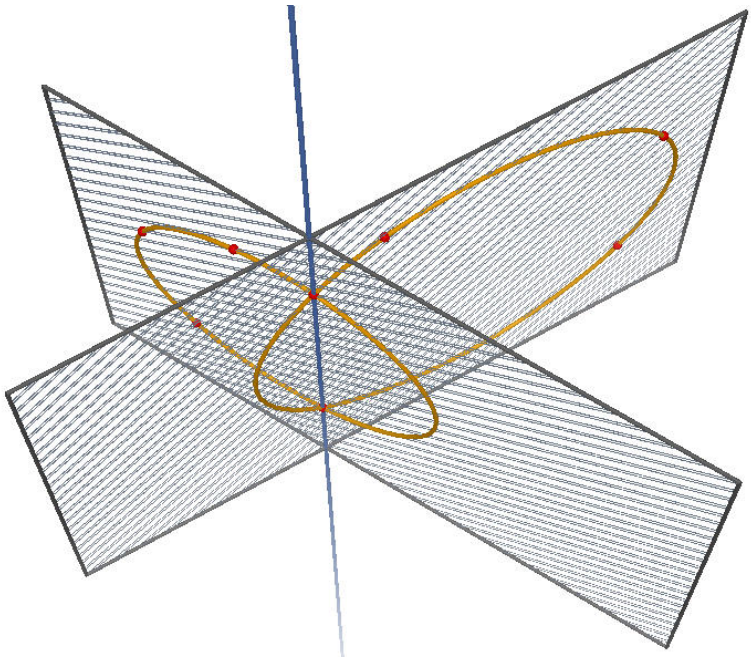


Abb. 21 Schnittpunkte zweier Kreise in räumlicher Lage

Konstruktion „Schnittpunkte zweier Kreise in räumlicher Lage“: Jeder der Kreise bestimmt eine Ebene, deren Schnittgerade die Kreise in den als existent vorausgesetzten Kreisschnittpunkten schneidet.

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

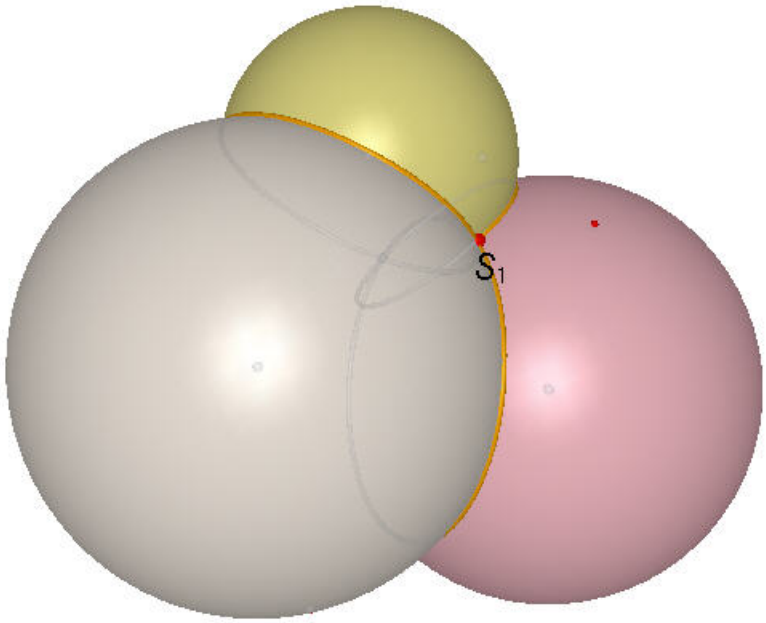


Abb. 22 Schnittpunkte dreier Kugeln

Konstruktion „Schnittpunkte dreier Kugeln“: Zu je zwei der Kugeln konstruiert man den Schnittkreis. Je zwei der drei Schnittkreise schneiden einander in zwei Punkten. Diese Kreischnittpunkte fallen mit den Punkten zusammen, die diesen drei Kugeln gemein sind.

3. Die konstruktiven Optionen und ihre Anwendungen in Cabri 3D

Im folgenden untersuchen wir, welche konstruktiven Optionen Cabri 3D insgesamt besitzt. Wir konkretisieren einige der sich ergebenden Möglichkeiten an ausgewählten Konstruktionen. Es wird sich zeigen, dass diese Konstruktionsmöglichkeiten die händischen bei weitem übersteigen.

3.1 Basis- und Grundkonstruktionen in Cabri 3D

Das Diagramm 3 gibt uns einen Überblick über die konstruktiven Optionen in den ersten vier Werkzeugboxen. Darunter befinden sich die Erklärungen für diese Optionen. Die entsprechenden Basis- bzw. Grundkonstruktionen mit der Angabe der Parameterobjekte sind gerahmt.
Die Optionen sind „polymorph“, d. h. es wird das entsprechende Objekt konstruiert je nach Auswahl der es bestimmenden Objekte. Z. B. kann bei der Option „Ebene“ diese erzeugt werden aus drei Punkten oder einem Punkt und einer Geraden oder aus zwei nicht windschiefen Geraden; dabei kommt es jeweils auf die Reihenfolge der Auswahl der Objekte nicht an.
Um einfache ebene Objekte wie Winkel und (auch überschlagene) Polygone zu konstruieren bedarf es der Erzeugung von *Halbgeraden* bzw. Strahlen und *Strecken*, die Teilobjekte entsprechender Geraden (Trägergeraden) sind. Im konstruktiven Raum kommen folgende Objekte hinzu, die Teilobjekte von Ebenen (Trägerebenen) sind: die Halbebenen z. B. zur Konstruktion eines Kantenwinkels, die *Polygone* z. B. als Seitenflächen von Polyedern, die *Winkelfelder* zur Konstruktion räumlicher Ecken usw. Cabri 3D verfügt über die entsprechenden Werkzeuge (das Objekt „Kreisbogen“

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

ist in der Version 1.0 leider noch nicht verfügbar). Der Schnitt von *Zylinder- und Kegelmantelfächen* mit einer Ebene erzeugt Kegelschnitte. Diese sind in Cabri 3D referenzierbare Objekte. Damit können die Kegelschnitte ihrem Namen gemäß im virtuellen Raum behandelt werden (vgl. Schumann 2005c). In Cabri 3D sind auch *Kegelschnitte* aus fünf in einer Ebene liegender Punkte erzeugbar (Option „Kegelschnitte“).

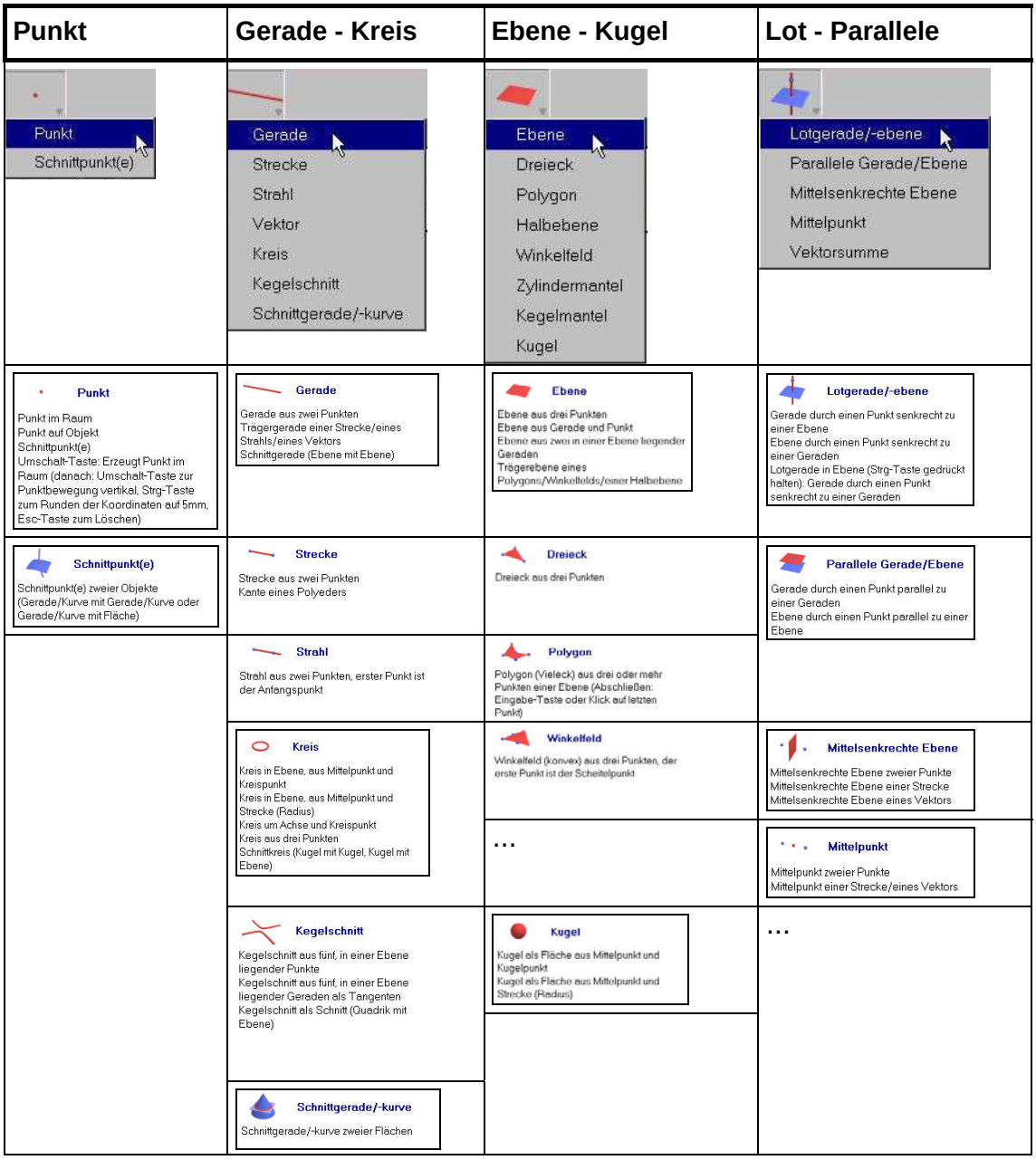


Diagramm 3 **Elementare Konstruktionen und Grundkonstruktionen**

Wir wenden nun die vorstehenden Konstruktionswerkzeuge an. – Dabei geben wir keine Begründungen für die einzelnen Konstruktionsschritte; uns kommt es hier auf die phänomenologische Konstruktionsausführung im virtuellen Raum an.
Bei der Erzeugung von ersten Punkten bzw. von ersten Objekten, die von Punkte abhängen, geht man immer von einer Referenzebene aus. Konstruktionen, die aus der Referenzebene herausführen, kann man „verräumlichend“ nennen; solche Konstruktionen sind das Erzeugen von Punkten außerhalb dieser Ebene, das Lot-Errichten in

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

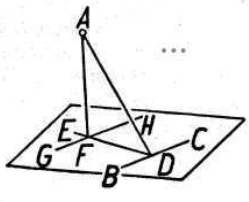
einem Punkt der Ebene, die Konstruktion einer Lotebene zu einer Geraden bzw. eines Geradenobjekts in der Ebene und die Konstruktion eines Kreises um eine in der Ebene gelegene Achse.

Beispiel 1 (Euklids Lotkonstruktion)
Wir beginnen mit der ersten raumgeometrischen Konstruktion Euklids im ersten seiner raumgeometrischen Bücher XI - XIII, der kugelfreien Konstruktion der Lotgeraden von einem Punkt auf eine Ebene (Abb. 23.1).

Auf eine gegebene Ebene von einem oberhalb gegebenen Punkte aus das Lot zu fällen.

Der oberhalb gegebene Punkt sei A und die gegebene Ebene die Grundebene. Man soll vom Punkte A auf die Grundebene das Lot fällen.

Man ziehe beliebig in der Grundebene eine Gerade BC und fälle vom Punkte A auf BC das Lot AD ... . Sollte AD auch Lot auf die Grundebene sein, so wäre die Aufgabe schon ausgeführt. Anderenfalls ziehe man vom Punkte D aus in der Grundebene $DE \perp BC$ und fälle aus A auf DE das Lot AF ... . Ferner ziehe man $GH \parallel BC$ durch F ... .



Da $BC \perp$ sowohl DA als DE, steht BC auf der Ebene EDA senkrecht ... . Nun ist GH ihm parallel. Hat man aber zwei parallele Geraden, von denen die eine auf irgendeiner Ebene senkrecht steht, dann muß auch die andere auf derselben Ebene senkrecht stehen ... ; also steht auch GH auf der Ebene durch ED, DA senkrecht.

Abb. 23.1

Konstruktionsbeschreibung mit den Cabri 3D-Optionen:
1) Punkt im Raum: A („Punkt“)
2) Punkt in Ebene: B („Punkt“)
3) Punkt in Ebene: C („Punkt“)
4) Gerade: BC („Gerade“)
5) Ebene: ABC („Ebene“)
6) Lotgerade von A auf BC („Lotgerade“)
7) Schnittpunkt Lotgerade mit BC: D („Schnittpunkt“)
8) Lotgerade in D auf BC („Lotgerade“)
9) Punkt auf Lotgerade: E („Punkt“)
10) Ebene: ADE („Ebene“)
11) Lotgerade von A auf DE („Lotgerade“)
12) Schnittpunkt Lotgerade mit DE: F („Schnittpunkt“)

Mögliche Abkürzung der Konstruktion mit der Option: „Ebene“ aus Punkt und Gerade.

Abb. 23.2

Die nach der Konstruktionsbeschreibung Abb. 23.2) ausgeführte Konstruktion (Abb. 24) kann man von allen Seiten betrachten (Abb. 25). Durch Verziehen von Parameterobjekten, hier z. B. des Punktes A, kann man experimentell die Richtigkeit einer Konstruktion überprüfen (Abb. 26). Die Phasenfolge „Konstruieren – Visualisieren – Variieren“ ist quasi für alle Konstruktionen anzustreben. Im folgenden beschränken wir uns aber auf das Konstruieren, das nur in wenigen Ergebnisbildern von Konstruktionsschritten dokumentiert werden soll.

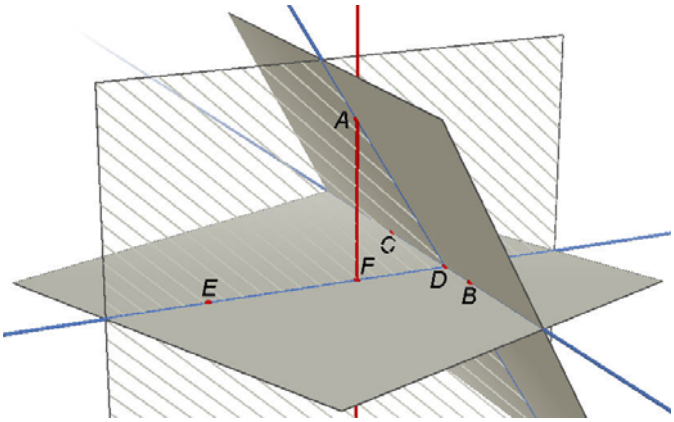


Abb. 24 Konstruktion der Konfiguration (Ergebnis)

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

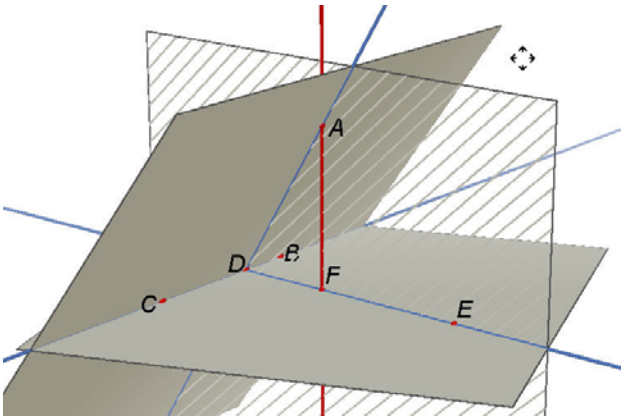


Abb. 25 Visualisierung der Konfiguration

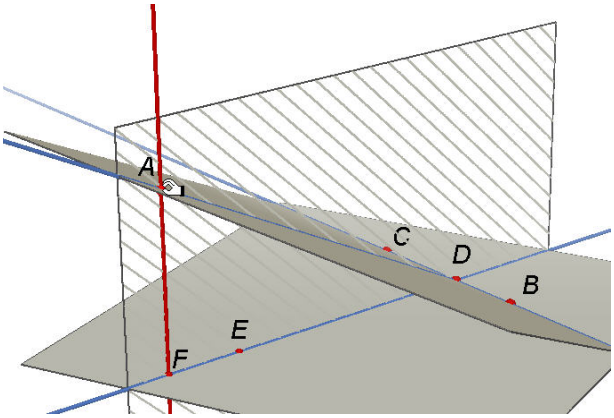


Abb. 26 Variation der Konfiguration

Beispiel 2 (Lotabstand zweier windschiefer Geraden)
Als Beispiel für eine Lageaufgabe haben wir die Konstruktion der Lotgerade zu zwei windschiefen Geraden g, h gewählt. – Eine der möglichen Konstruktionen: Durch einen beliebigen Punkt G auf g konstruieren wir die Parallele zu h und die Ebene aus dieser Parallelen und h (Abb. 27). Von einem beliebigen Punkt H auf der Geraden h fällen wir das Lot auf diese Ebene und erhalten den Lotfußpunkt I (Abb. 28).

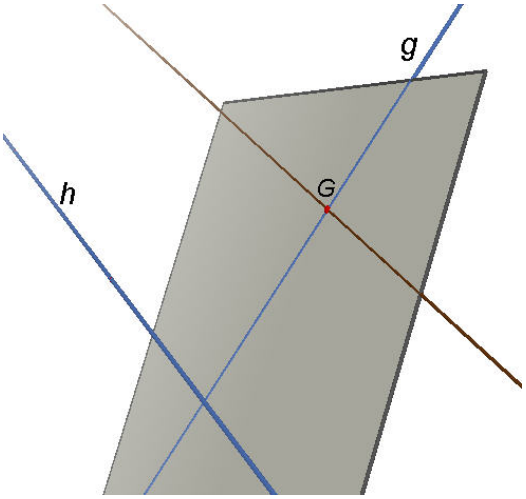


Abb. 27

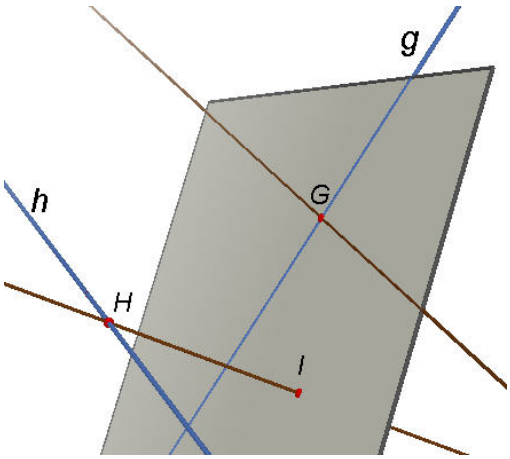


Abb. 28

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

Durch Verziehen von H kann man die Lage von I auf die Gerade hinmanipulieren und so eine experimentelle Lösung für die auf g und h gesuchten Punkte erhalten (Abb. 29). Zur Konstruktion dieser Punkte wird eine Parallele durch I zu h gelegt, die g in Lg schneidet Abb. 30). Das Lot in Lg auf die Ebene trifft h in Lh. Die Verbindungsgerade beider Punkte ist die Gerade, die sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht. Die Verbindungsstrecke LgLh ist die kürzeste zwischen den Punkten beider Geraden.

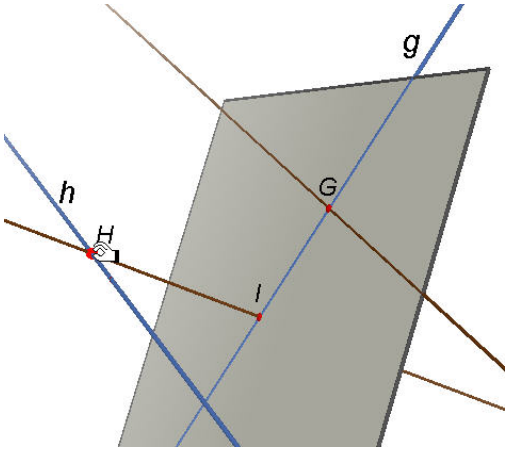


Abb. 29

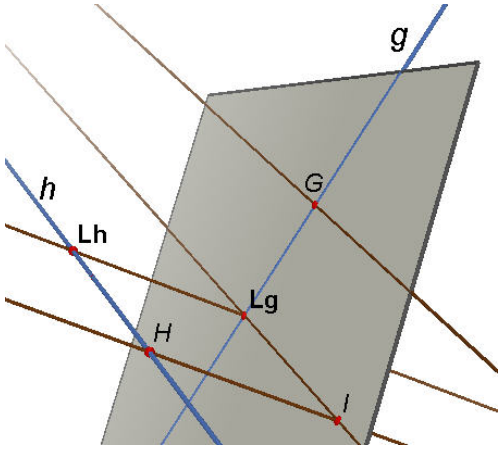


Abb. 30

Beispiel 3 (Höhenschnittpunkt-Ersatz im Tetraeder)
Wir konstruieren aus vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten ein Tetraeder (dreiseitige Pyramide), von dem wir nur drei Seitenflächen einzeichnen, damit man sein Inneres sehen kann. Wir fällen nun das Lot von jedem der vier Eckpunkte auf die jeweilige Gegenfläche und errichten außerdem in den Orthozentren, d. h. in den Höhenschnittpunkten der Seitenflächendreiecke, die Lote auf diese Flächen (Abb. 31). Wir erhalten so vier Paare aus parallelen Geraden. Jetzt konstruieren wir zu jedem dieser Paare die „Mittelparallele“ und erkennen, dass sich die vier Mittelparallelen einander in einem Punkt schneiden. Diese Schnittpunkteigenschaft ist invariant bei Formvariation des Tetraeders. Der Schnittpunkt H* dient als Ersatz für den nicht existierenden Höhenschnittpunkt; er wird Punkt von Monge genannt. Der Punkt von Monge (1746-1818) liegt zusammen mit dem Umkugelmittelpunkt M und dem Schwerpunkt S des Tetraeders auf einer Geraden, der Eulerschen Geraden des Tetraeders (Abb. 32) usw. Dieses Beispiel soll die Methode der Satzfindung durch Konstruieren und Variieren repräsentieren (weitere Beispiele: Schumann 2004a).

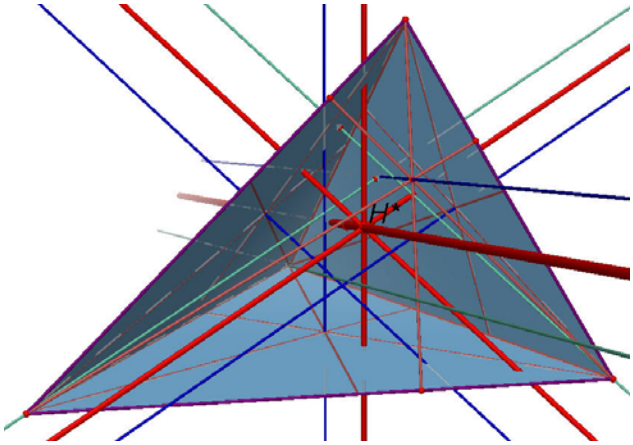


Abb. 31

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

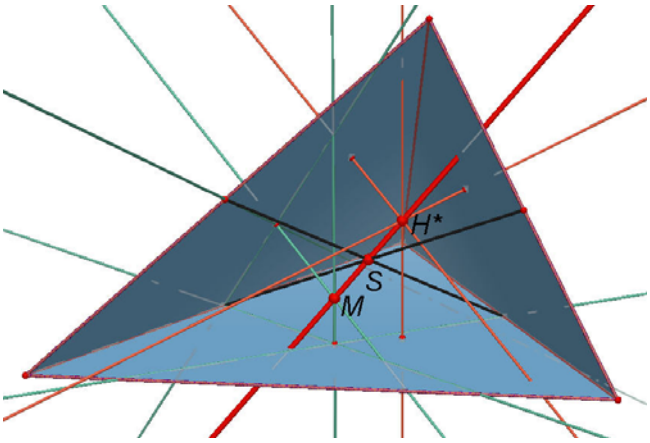


Abb. 32

Beispiel 4 (Regelmäßiges Oktaeder mit Um- und Inkugel)
Frei nach der Oktaeder-Konstruktion Euklids im 13. Buch seiner Elemente konstruieren wir in einer Bezugsebne den Durchmesserkreis einer Kugel und dazu zwei orthogonal stehende Durchmessergeraden mit den entsprechenden Schnittpunkten (Abb. 33). Darüber konstruiert man die Kugel und in ihrem Mittelpunkt M das Lot auf die Ebene. Dieses schneidet die Kugel in den zwei noch fehlenden Eckpunkten des Oktaeders. Wir zeichnen sechs der acht Seitenflächendreiecke ein, um von M aus das Lot auf eine der Seitenflächen zu konstruieren. Die Kugel um M durch den Lotfußpunkt ist die Inkugel des Oktaeders (Abb. 34). Durch Verziehen des den Kreisradius bestimmenden Punktes kann man die Größe der Figur variieren.

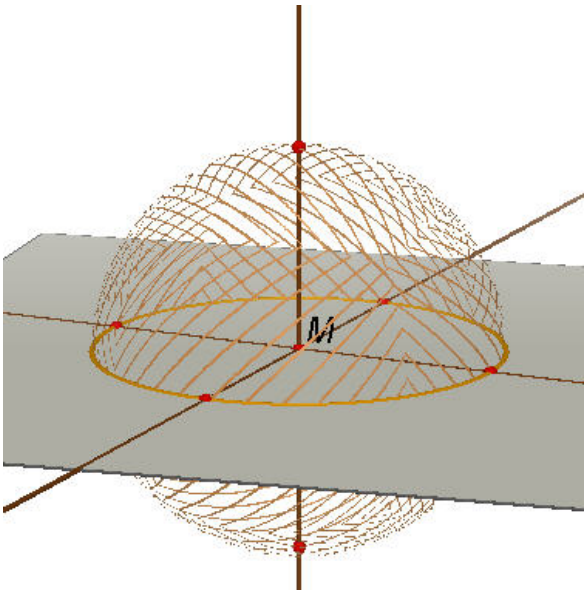


Abb. 33

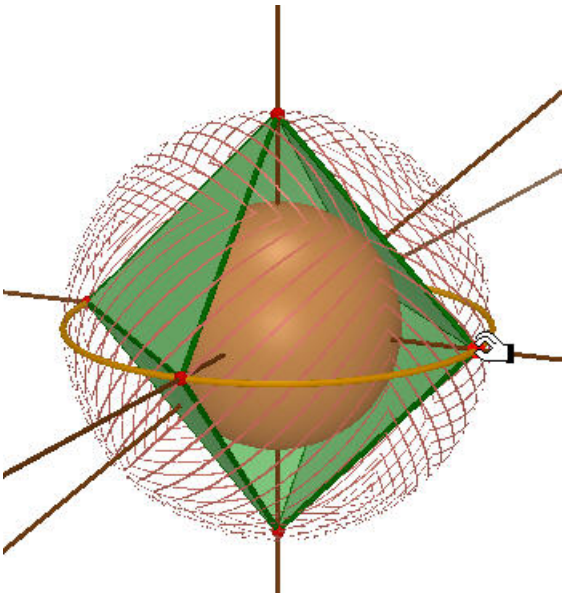


Abb. 34

Beispiel 5 (Umkugel-Hexaeder aus Vierecken)
Auf eine Kugel legen wir vier Punkte A, B, C, F wie in Abbildung 35. Durch A, B, C bzw. A, B, F bzw. B, C, F konstruieren wir jeweils einen Kreis (Abb. 35). Auf den Kreis ABC legen wir den Punkt D, auf den Kreis ABF den Punkt E und auf den Kreis

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

BCF den Punkt G. Die Kreise AED, CDG und EFG schneiden einander (!) im noch fehlenden achten Eckpunkt H des Hexaeders (Abb. 36), dessen Viereckssseiten-flächen nun eingezeichnet werden können (Abb. 37 mit einem offenen „Seiten-flächenfenster“). Folgerung aus der Konstruktion: Ein Umkugel-Sechsflächner aus Vierecken ist festgelegt durch eine räumliche Ecke aus drei Sehnenvierecken.

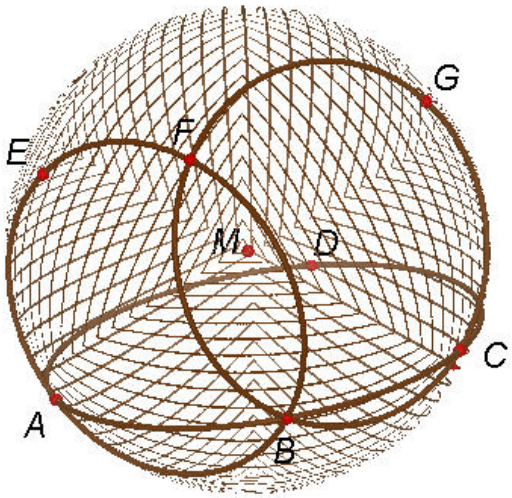


Abb. 35

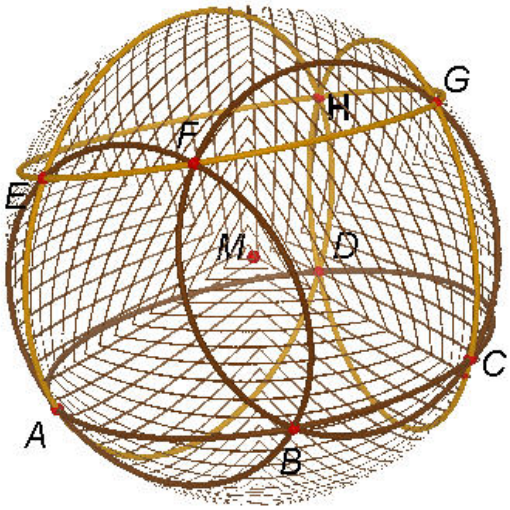


Abb. 36

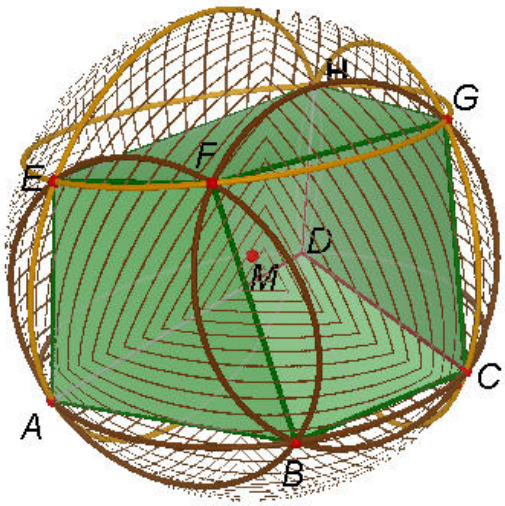


Abb. 37

Beispiel 6 (Besondere Linien und Punkte im Kugeldreieck)
Gegeben sind drei auf einer Kugel liegende Punkte A, B, C, die nicht in einer Ebene liegen. Wir konstruieren die Schnittkreise der Kugel mit den Ebenen aus Kugelmittel-punkt und je zwei der Punkte. Diese Kreise (Großkreise) bilden das Kugeldreieck ABC. Die mittelsenkrechten Ebenen zu je zwei der Punkte schneiden die Kugel in den sogenannten „Mittelsenkrechten“ des Kugeldreiecks, weil diese Großkreise durch die Mittelpunkte der betreffenden Kreisbögen gehen und auf diesen senkrecht stehen (Abb. 38). Diese Mittelsenkrechten schneiden einander im Punkt M. Das Lot von M auf die Ebene durch A, B, C durchstößt diese in M‘; M‘ ist der Mittelpunkt Umkreises des planaren Dreiecks ABC, der zugleich Umkreis des Kugeldreiecks ist (Abb. 39). Im Gegensatz zum planen Dreieck liegen der analog zu konstruierende Schnittpunkt der Mittelsenkrechten M, der Seitenhalbierenden S und der Höhen H

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

nicht auf einem Großkreis, der vergleichbar mit der Eulergeraden eines planaren Dreiecks wäre (Abb. 40).

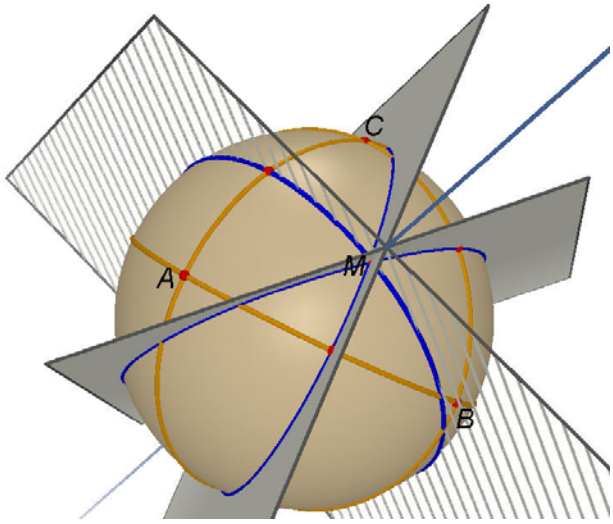


Abb. 38

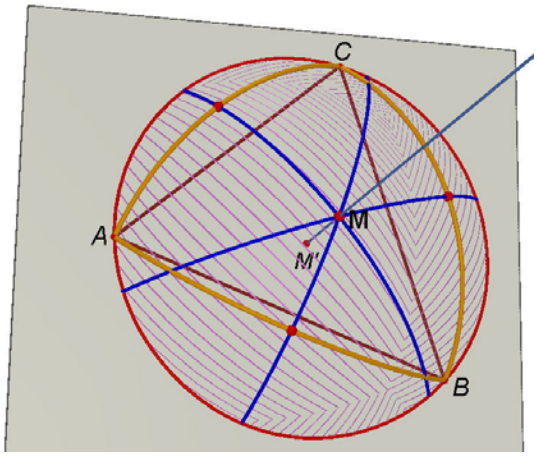


Abb. 39

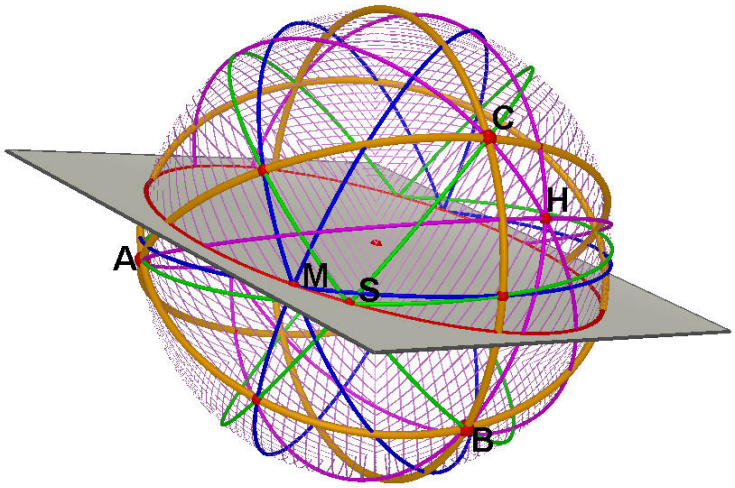


Abb. 40

Beispiel 7 (Regelmäßiges Tetraeder aus 3 Kugeln)
Als ein weiteres Beispiel für eine verräumlichende Analogiebildung konstruieren wir in einer Ebene parallel zum Bildschirm ein gleichseitiges Dreieck nach der ersten Konstruktion Euklids, indem wir um jeden von zwei Punkten einen Kreis durch den anderen legen usw. (Abb. 41). Die Ebene wird nun nach hinten gedreht. Um jeden der drei Eckpunkte des gleichseitigen Dreiecks konstruieren wir eine Kugel durch einen weiteren dieser Eckpunkte. Die Schnittkreise von je zwei der drei Kugeln schneiden einander in der Spitze des regelmäßigen Tetraeders, dessen Basis das gleichseitige Dreieck bildet (Abb. 42).

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

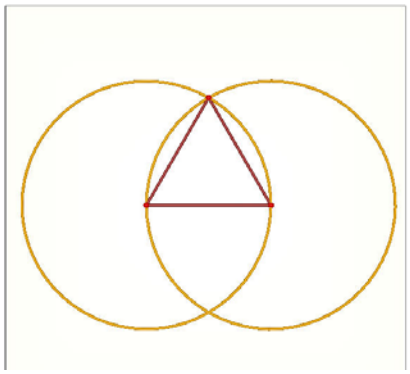


Abb. 41

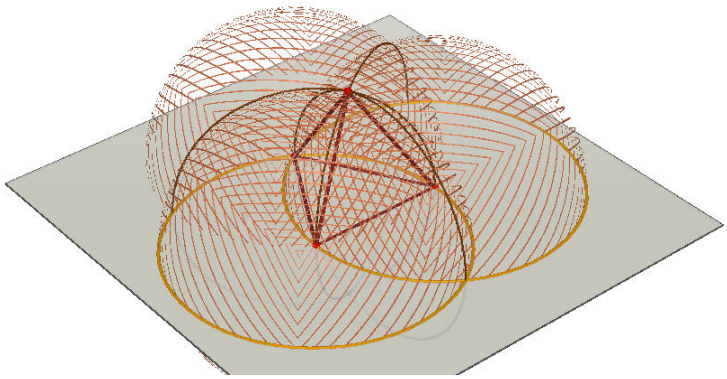


Abb. 42

3.2 Konstruktionen mit Kongruenzabbildungen

Diagramm 4
Abbildungen

Das Duplizieren von Objekten ist eine effektive Konstruktionshilfe in Grafikwerkzeugen. In Cabri 3D sind folgende Kongruenzabbildungen implementiert, die das konditionierte Verdoppeln von Objekten gestatten (Diagramm 4): Punktspiegelung, Geradenspiegelung (Halbdrehung um eine Achse), Ebenenspiegelung, Parallelverschiebung und Drehung (um eine Achse mit einem Winkel). Mit diese Abbildungen kann man entsprechende Konstruktionsaufgaben auf elegante Art lösen, indem man Objekte wie Punkte, Geraden, Ebenen, Polygone und Polyeder punkt-, achsen-, ebenen- und verschiebungssymmetrisch dupliziert. Mit Achsendrehungen um Winkel der Größe 360°/n, n=2, 3, ..., lassen sich drehsysmmetrische (Teil-)Figuren erzeugen. Die Hintereinanderausführung solcher Abbildungen erhöht die flexible Ausführung von Konstruktionen. Für Schub- und Drehspiegelungen sowie für Schraubungen gibt es keine eigenen Optionen; in der erweiterten Version von Cabri 3D können entsprechende Abbildungsmakros für punktweises Abbilden definiert werden. Kongruente Raumfiguren von gleicher Orientierung bzw. gleichem Schraubsinn lassen sich durch eine Parallelverschiebung, eine Drehung oder eine Schraubung, d. h. durch 2 oder 4 hintereinanderausgeführte Ebenenspiegelungen aufeinander Abbilden; diese Abbildungen beschreiben die Lageänderung durch Bewegen der Raumfiguren. Für die kongruenten Raumfiguren unterschiedlichen Schraubsinns benötigt man eine Ebenenspiegelung oder eine Schub- bzw. Drehspiegelungen, d. h. drei Ebenenspiegelungen; die räumliche Punktspiegelung kann durch Spiegelung an drei paarweise senkrecht stehenden Ebenen ersetzt werden.
Für punktweises Abbilden sind auch andere Abbildungen, z. B. Ähnlichkeitsabbildungen (u. a. die Zentralprojektion), affine Abbildungen (u. a. die Parallelprojektion), die stereografische Projektion, die Kugelspiegelung etc. durch entsprechende Konstruktionen ausführbar.

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

Die Abbildungen 43 – 47 illustrieren die Anwendung der Kongruenzabbildungen in Cabri 3D am Beispiel einer gleichkantigen Pyramide mit regelmäßiger fünfseitiger Grundfläche.

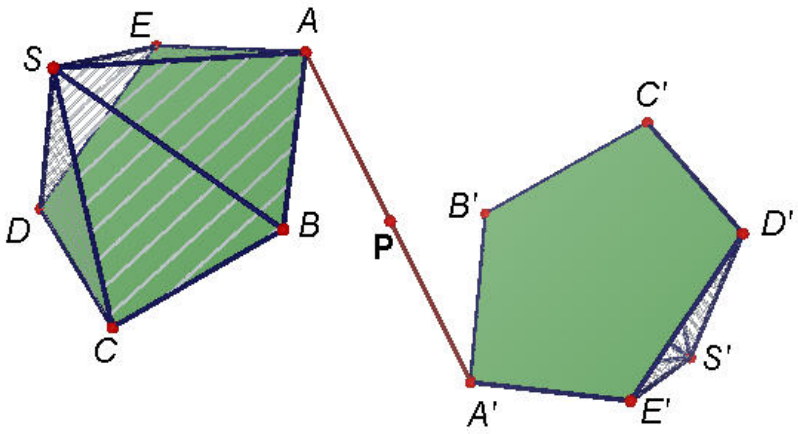


Abb. 43 Punktspiegelung

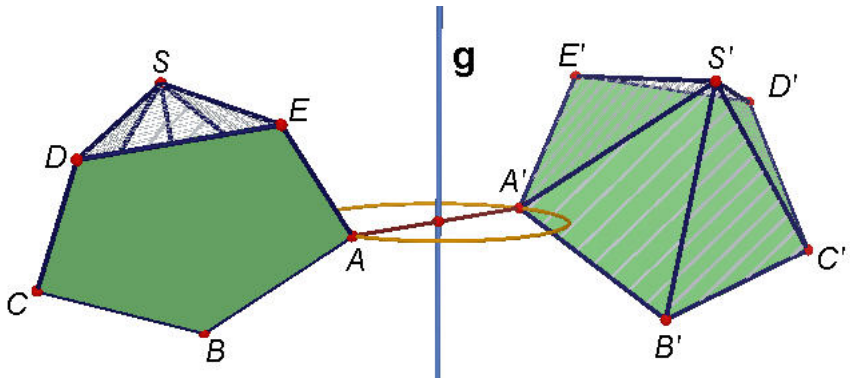


Abb. 44 Geradenspiegelung (Halbdrehung um eine Achse)

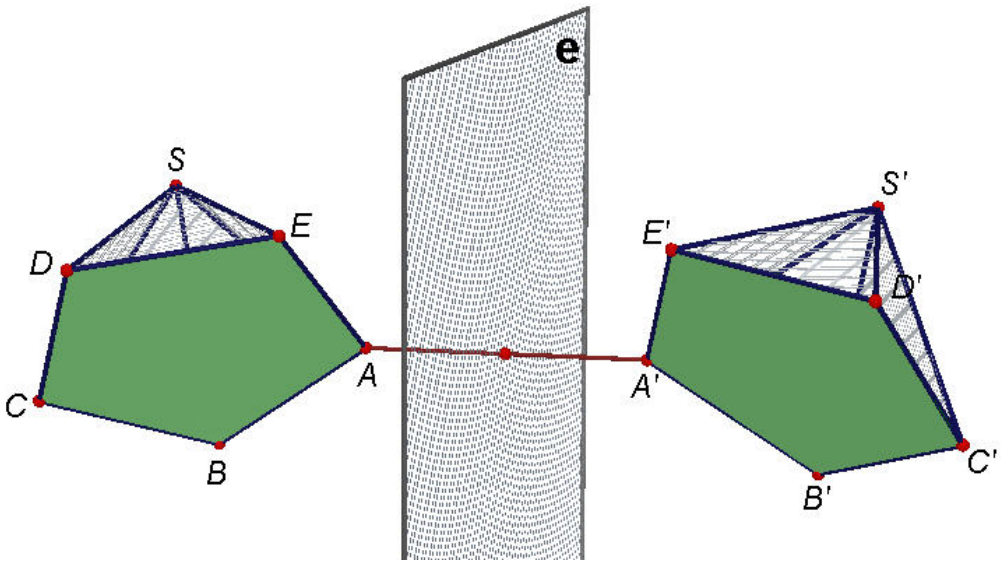


Abb. 45 Ebenenspiegelung

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

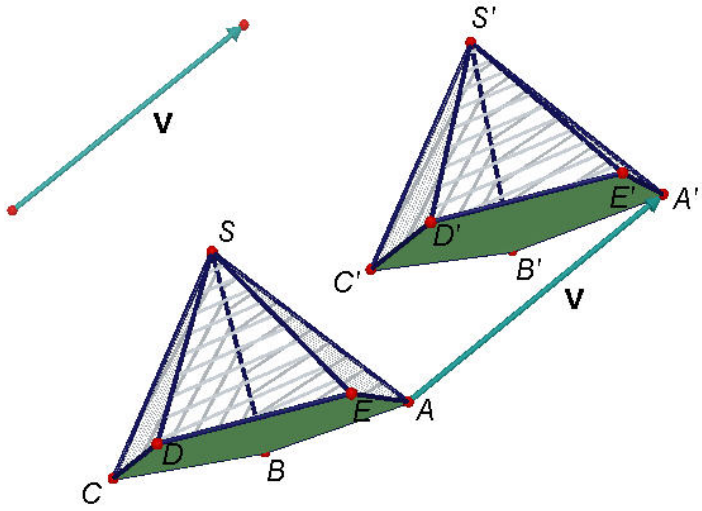


Abb. 46 Parallelverschiebung

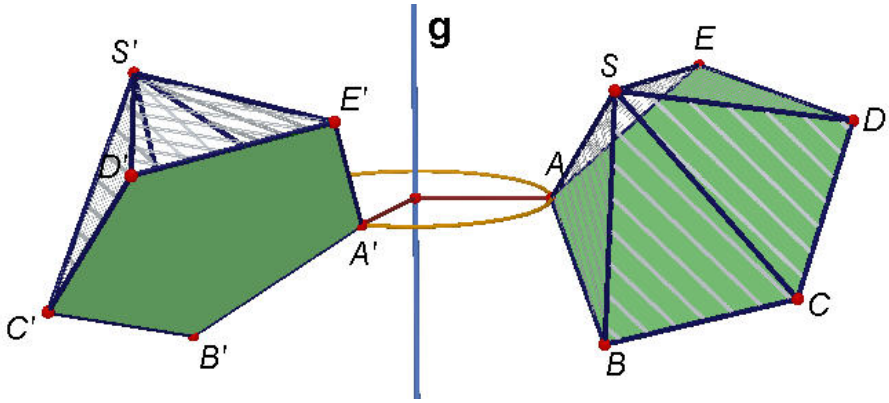


Abb. 47 Drehung um eine Achse

3.3 Konstruktionen mit regelmäßigen Polygonen

Die Bereitstellung ebener Formmodule, hier die für regelmäßige Polygone, zielt auf die Konstruktion von Polyedern mit regelmäßigen Polygonen als Seitenflächen (Diagramm 5; mit Angabe der Modulparameter). Solche Polyeder können im konvexen Falle nur gleichseitige Dreiecke, Quadrate, regelmäßige Fünfecke, Sechsecke, Achtecke, Zehnecke und Zwölfecke besitzen. Damit lassen sich unter Zuhilfenahme von Kongruzabbildungen die sogenannten Johnsonschen Körper erzeugen (vgl. u. a. http://home.aanet.com.au/robertw/Glossary.html). Der in der Raumgeometrie wenig bewanderte Nutzer kann nicht wissen, dass es keine solchen Körper mit regelmäßigem 7-Eck bzw. 9-Eck bzw. 11-Eck usw. als Seitenfläche gibt; hier stellt die Frage nach der geometrie-inhaltliche Selbsterklärung des Werkzeugs. Für die Erzeugung von Sternpolyedern, insbesondere der regelmäßigen Sternpolyedern nach Kepler-Poinsot (s. o.) kann man das implementierte Sternfünfeck und Sternsechseck benützen.

Wie mit ebenen Formmodulen und mit Kongruenzabbildungen ein Körper konstruiert werden kann, zeigen wir am Beispiel der Konstruktion des Ikosaeders frei nach Euklids Konstruktion im 13.Buch seiner „Elemente“.

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

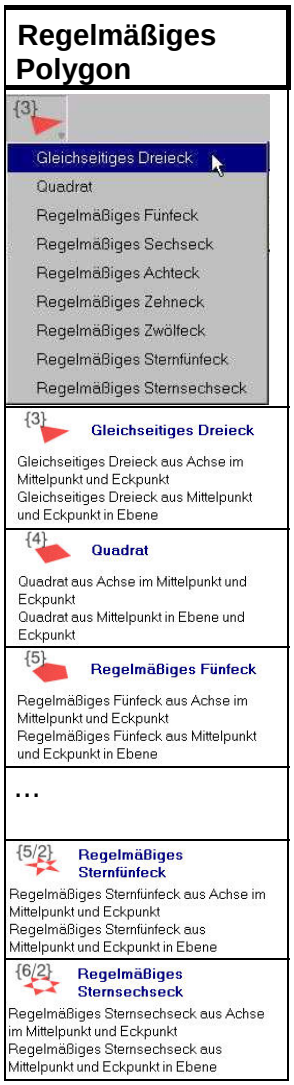


Diagramm 5
Regelmäßige Polygone

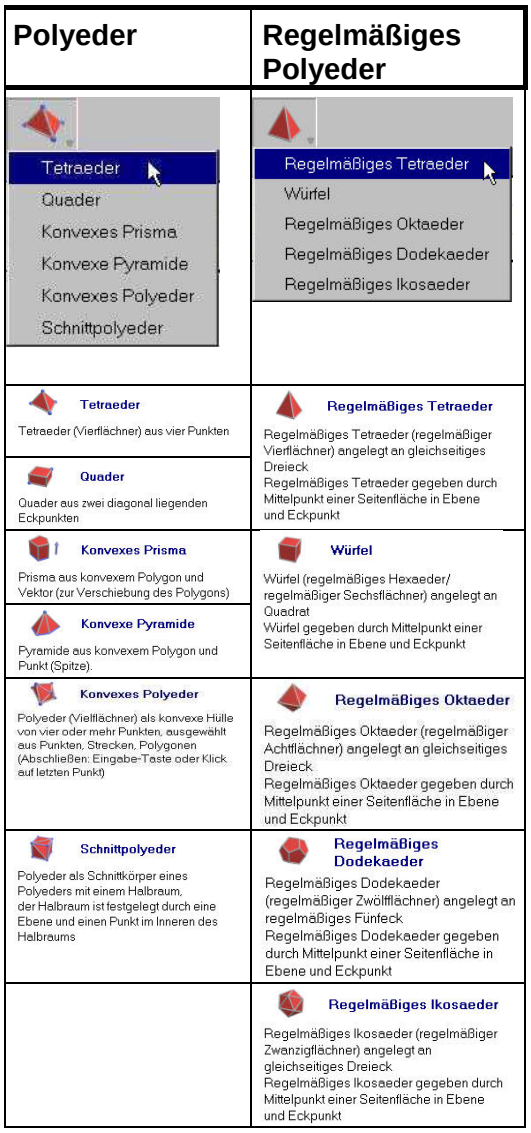


Diagramm 6 **(Regelmäßige) Polyeder**

Beispiel 8 (Ikosaeder-Konstruktion)
Bei diesem Beispiel wird zuerst das *gleichkantige 5-eckige Antiprisma* konstruiert und danach werden die *gleichkantigen 5-seitigen Pyramiden* passend aufgesetzt. Den sequentiellen Konstruktionsalgorithmus beschreiben wir hier relativ kleinschrittig (Konstruktionsvarianten sind möglich).

<u>Konstruktion des gleichkantigen 5-eckigen Antiprismas</u>

1) Konstruktion eines Kreise aus Mittelpunkt und Kreispunkt („Kreis“) in der Bezugsebene
2) Konstruktion eines dem Kreis einbeschreibenen regelmäßigen 5-Ecks („Regelmäßiges Fünfeck“): Grundfläche des Antiprismas
3) Punktspiegelung des regelmäßigen 5-Ecks am Kreismittelpunkt („Punktspiegelung“) – Abbildung 48

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

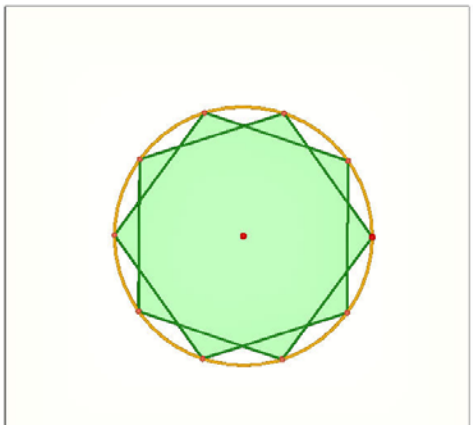


Abb. 48

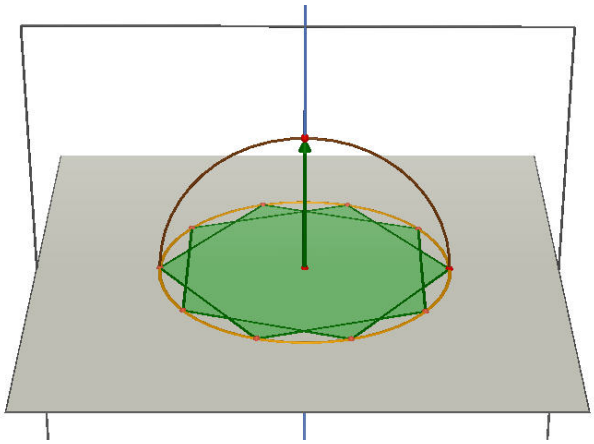


Abb. 49

4) Konstruktion der Lotgeraden im Kreismittelpunkt auf die Bezugsebene („Lotgerade“) – Abbildung 49
5) Konstruktion einer Hilfsebene durch Kreismittelpunkt und Lotgerade („Ebene“) – Abbildung 2
6) Konstruktion des Kreises um den Kreismittelpunkt durch einen der Eckpunkte, um den Kreisradius auf dem Lot abzutragen („Kreis“) – Abbildung 49
7) Konstruktion des Schnittpunkts aus Lot und Kreis („Schnittpunkt“) – Abbildung 49
8) Konstruktion des Verschiebungsvektors vom Lotfußpunkt zum Schnittpunkt – Abbildung 49

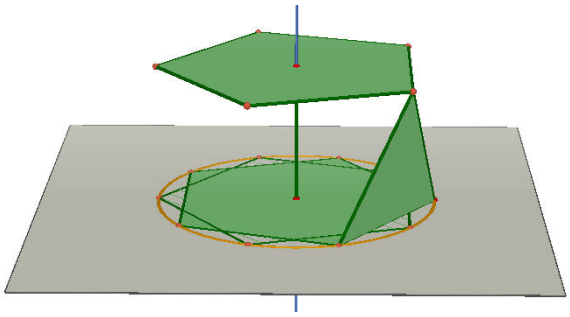


Abb. 50

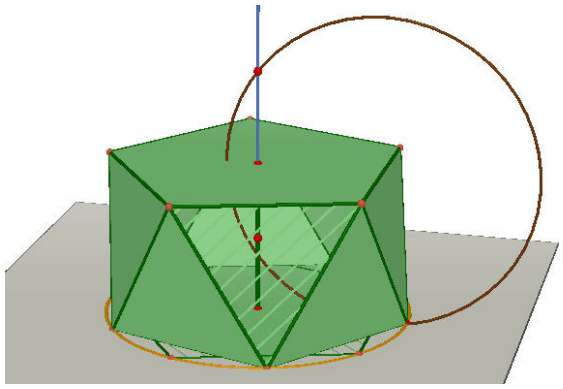


Abb. 51

9) Verschiebung des gedrehten 5-Ecks mit diesem Vektor („Parallelverschiebung“): Deckfläche des Antiprismas – Abbildung 50
10) Konstruktion von fünf Dreiecken als Seitenflächen durch jeweiliges Verbinden eines verschobenen Eckpunktes mit den seiner ursprünglichen Lage benachbarten Eckpunkten („Dreieck“) – Abbildung 50
11) Konstruktion der restlichen fünf dreieckigen Seitenflächen durch Punktspiegelung („Punktspiegelung“) am Mittelpunkt („Mittelunkt“) der Mittelpunkte von Grund- und Deckfläche bzw. des Verschiebungsvektors – Abbildung 51 mit schraffierter Seitenfläche zur Innenansicht.

<u>Konstruktion der aufgesetzten gleichkantigen Pyramiden</u>

12) Konstruktion eines Kreises um eine der Kanten der Deckfläche als Achse durch den gegenüberliegenden Eckpunkt der Grundfläche („Kreis“) – Abbildung 51

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

13) Konstruktion des Schnittpunkts aus diesem Kreis mit der Lotgeraden durch den Mittelpunkt der Grund- bzw. Deckfläche („Schnittpunkt“): Pyramidenspitze – Abbildung 51
14) Konstruktion von fünf Dreiecken als Seitenflächen der Pyramide mit der Deckfläche als Basis durch jeweiliges Verbinden der Spitze mit entsprechenden Eckpunkten („Dreieck“). Die Pyramide kann auch mit dem Werkzeug „Konvexe Pyramide“ konstruiert werden.
15) Konstruktion der anderen Pyramide durch Punktspiegelung der betreffenden Objekte am Mittelpunkt der entsprechenden Lotstrecke – Abbildung 52 mit zur Innenansicht schraffierten Seitenflächen und ausgeblendeten 5-Ecken

Die Konstruktion kann abgeschlossen werden, indem man das Dodekaeder als referenzierbares Objekt („Konvexes Polyeder“ als konvexe Hülle seiner Eckpunkte, vgl. nächsten Abschnitt) definiert, mit dem dann entsprechende Operationen bzw. Abbildungen ausgeführt werden können (Abb. 53).

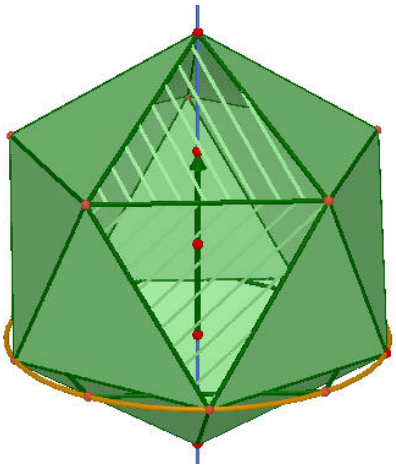


Abb. 52

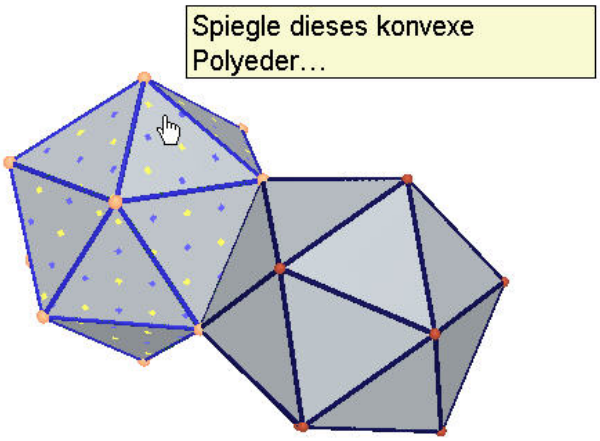


Abb. 53

Die bereits in Cabri 3D verfügbaren räumlichen Formmodule für die Platonischen Körper (vgl. Diagramm 6 rechts) sind mittels regelmäßiger Polygone und entsprechender Abbildungen „buttom-up“ konstruierbar – wie vorstehend am Beispiel des Ikosaeders gezeigt. Damit werden diese „Black-Box“-Module transparent bzw. einsichtig gemacht.

3.4 Konstruktion von und mit Polyedern

Als räumliche Formmodule lassen sich Tetraeder, Quader, konvexes Prisma, konvexe Pyramide und beliebiges konvexes Polyeder (als konvexe Hülle endlich vieler Eckpunkte) erzeugen (Diagramm 6 links; mit Angabe der Modulparameter). Diese referenzierbaren Körper sind als Flächen- und Kantenmodelle verfügbar (Cabri 3D ist kein Solid-Modeller!). – Die Option „Schnittpolyeder“ ermöglicht ein konvexes Polyeder mit einer Ebene zu zerschneiden. Durch diese Option gewinnt man Teilpolyeder als referenzierbare Objekte (vgl. Schumann 2001).

Als eine beispielgebende Anwendung vor allem des Formmoduls „Konvexes Prisma“ konstruieren wir ein Modell des Castel del Monte (vgl. Götze 1991).

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

Beispiel 9 (Konstruktion eines Modells des Castel del Monte)
Zuerst wird der Grundriss konstruiert (Abb. 54). Auf diesen setzen wir passend ein äußeres und ein inneres achteckiges Prisma als Kantenmodell (Abb. 55). Dann erzeugen wir einen der Ecktürme, verdreifachen diesen durch entsprechende Drehung und mit Geradenspiegelungen komplettieren wir die Türme (Abb. 56). Nun wird mittels geeigneter Polygone abgedeckelt. Zum Schluß wird ein Schnitt, der Erdgeschoss vom 1. Stock trennt durchgeführt (Abb. 57). Die Abbildung 58 zeigt das Modell von oben mit Blick in den Innenhof.

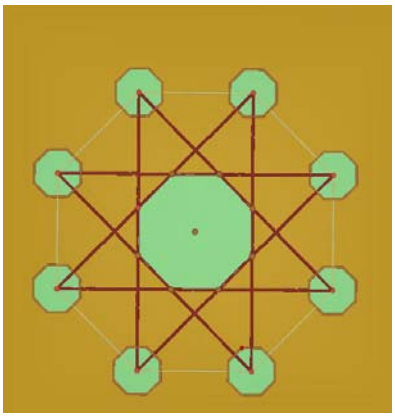


Abb. 54

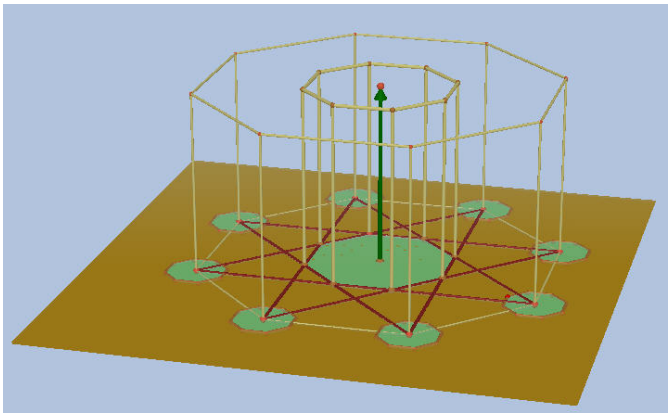


Abb. 55

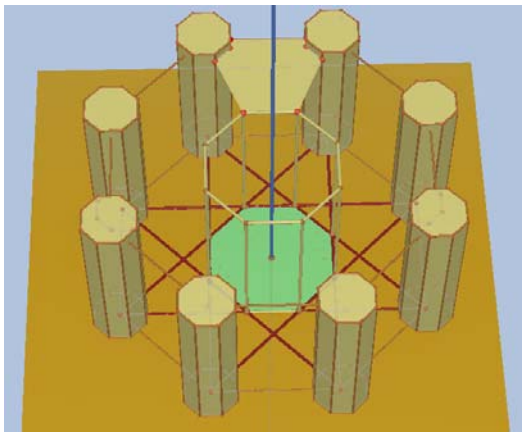


Abb. 56

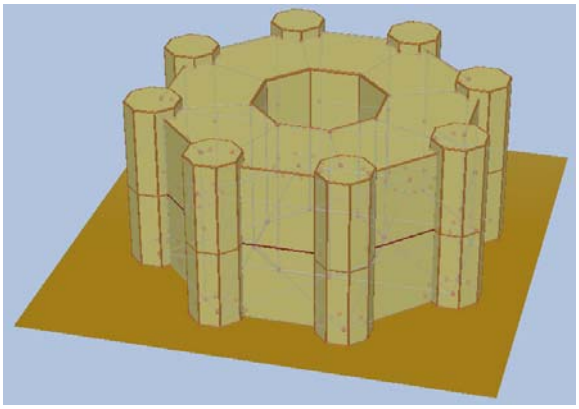


Abb. 57

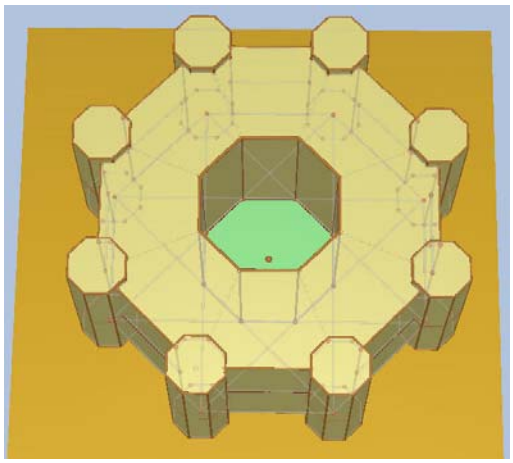


Abb. 58

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

Weitere Modellierungsbeispiele finden sich in „Interaktives Modellieren im virtuellen Raum“ (Schumann 2005b).
Als besondere räumliche Formmodule dürfen die platonischen Körper nicht fehlen (Diagramm 6 rechts; mit Angabe der Modulparameter).. Sie sind Träger reichhaltiger geometrischer Informationen; sie dienen auf vielfältige Weise als Ausgangskörper für die Erzeugung von Derivaten oder Agglomeraten. Das kann hier nur angedeutet werden (vgl. Schumann 2004b).

Beispiel 10 (Vom Würfelschnitt zum gestumpften Oktaeder)
Wir legen in den Würfel ein regelmäßiges Sechseck (Abb. 59) und führen einen Schnitt mit der durch dieses Sechseck gehenden Ebene (Abb. 60). Die referenzierbare Würfelhälfte spiegeln wir mehrfach an eine seiner Dreiecksflächen (Abb. 61) bis wir einen würfelförmigen Hohlkörper erhalten (Abb. 62). Dieser Körper umschließt ein gestumpftes Oktaeder, einem der archimedischen Körper, wie eine Gußform bzw. ein Negativ. Das gestumpfte Oktaeder kann nun als konvexe Hülle seiner Eckpunkte konstruiert werden (Abb. 63). Natürlich hätten wir das gestumpfte Oktaeder auch namensgemäß durch entsprechendes kantenhalbierendes Abschneiden der Ecken eines Oktaeders erhalten können.

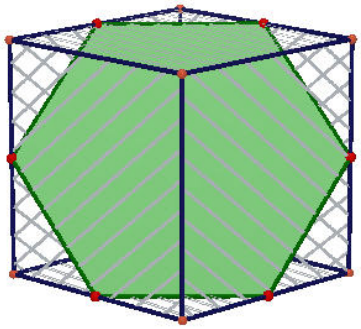


Abb. 59

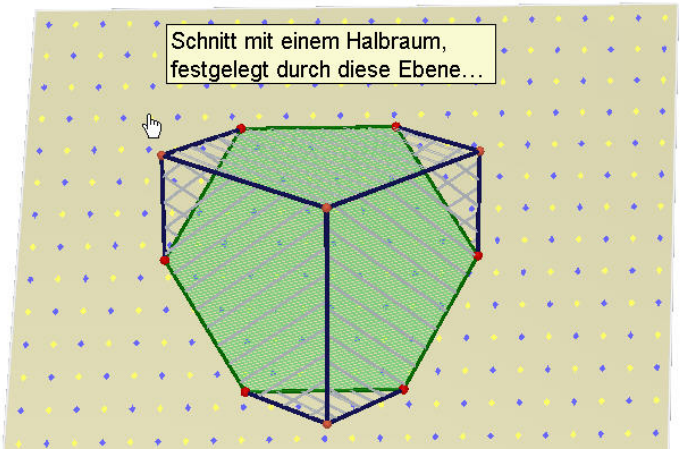


Abb. 60

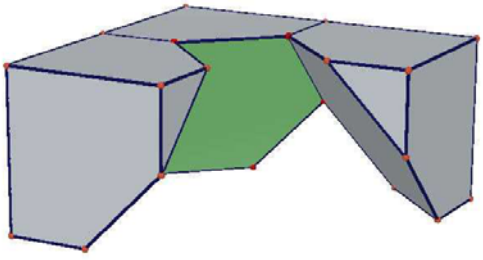


Abb. 61

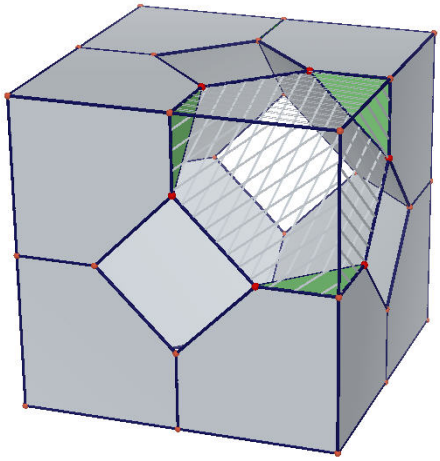


Abb. 62

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

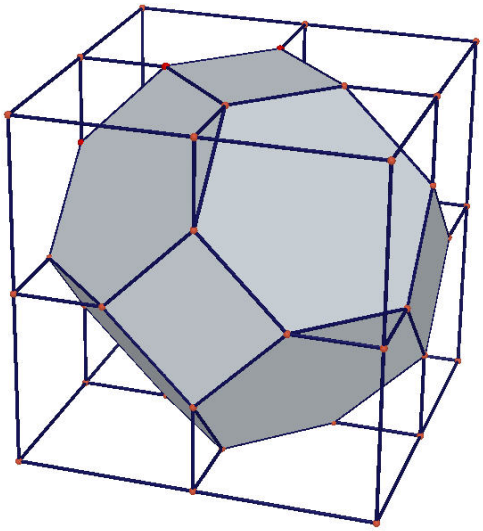


Abb. 63

Beispiel 11 (Würfelvierling)
Wir konstruieren alle Flächenmittenachsen eines Würfels (Abb. 64) und drehen den Würfel duplizierend zuerst um die vertikale Achse mit einem halben rechten Winkel als Drehwinkel (Abb. 65). Für die beiden anderen Achsen führen wir ebenfalls die entsprechenden Drehung aus und erhalten einen Körper aus insgesamt vier sich durchdringenden Würfeln, einen Würfelvierling (Abb. 66). Welche Symmetrie-Eigenschaften hat dieser im Vergleich mit dem ursprünglichen Würfel?

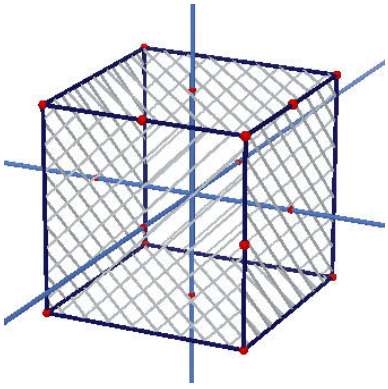


Abb. 64

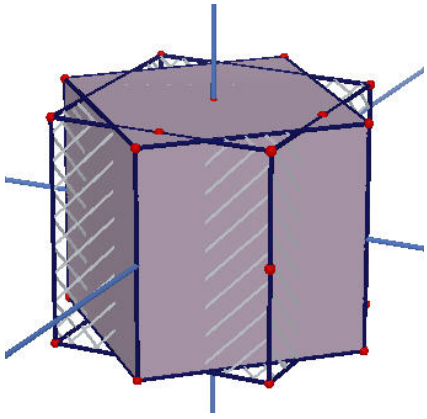


Abb. 65

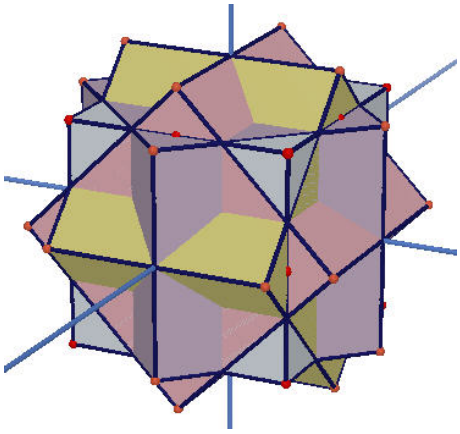


Abb. 66

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

Beispiel 12 (Ein Polyeder-Ring oder Toroid)
Eine Lösung der offenen Aufgabe, aus platonischen oder archimedischen Körpern Polyeder-Ringe zu konstruieren, ist das aus regelmäßigen Oktaedern und Ikosaedern bestehende punktsymmetrische Polyeder mit einem „Loch“ (Abb. 67). Es gibt noch weitere solche Ringe (Toroide) aus Oktaedern und Ikosaedern. Das systematische Probieren, um zu Lösungen zu gelangen wird durch das interaktive Konstruieren mit den räumlichen Formmodulen unterstützt. So ist auch das Herausfinden von unterschiedlichen Polyedermehrlingen, z, B. der Mehrlinge platonischer Körper eine reizvolle Aufgabe.

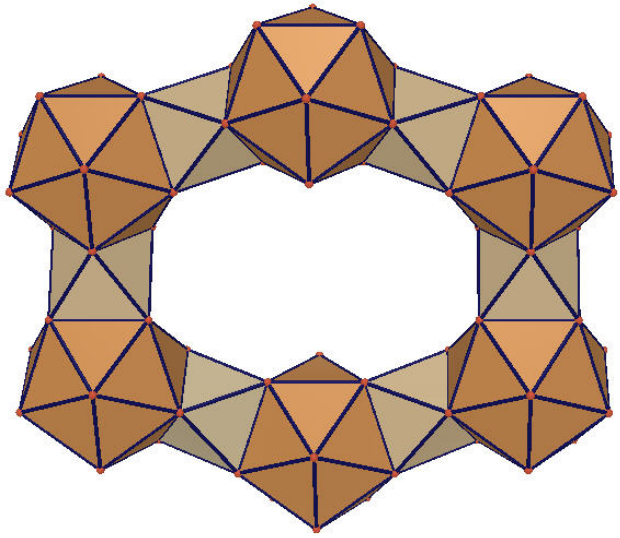


Abb. 67

4. Didaktische Bewertung des interaktiven raumgeometrischen Konstruierens

Welchen Einfluss nehmen die Neuen bzw. die Digitalen Medien auf den Mathematikunterricht, insbesondere auf seine Themen, Methoden und Intentionen (Diagramm 7) ?
In unserem Fall muss gefragt werden: Welchen Einfluss kann ein raumgeometrisches Konstruktionswerkzeug wie Cabri 3D auf den Geometrie-Unterricht haben?

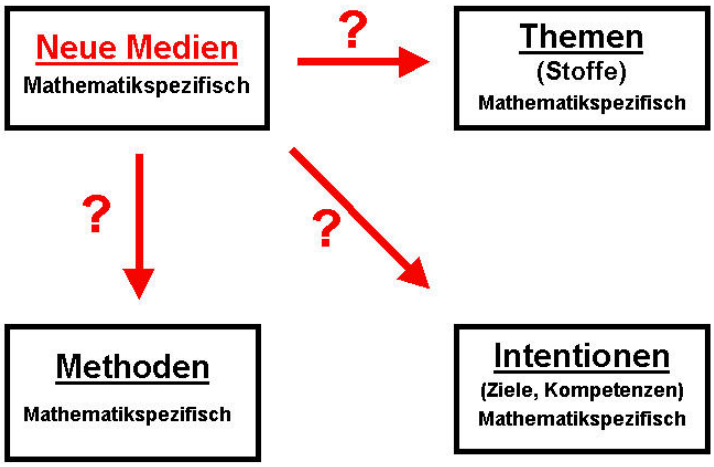


Diagramm 7 Neue Medien – Themen – Intentionen – Methoden

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

Wir können hier nur eine vorläufige Antwort versuchen:
Das geometrische Konstruieren im virtuellen Raum induziert eine neue Bewertung und Behandlung folgender traditioneller raumgeometrischer Themen im Geometrie-Unterricht (Schumann, H. (2005a):

- Körpergeometrie, insbesondere die Geometrie der Polyeder (z. B. der Platonischen Körper und ihrer Derivate)
- Begriffsbildung und Lagebeziehungen geometrischer Objekte (z. B. von Punkten, Geraden, Ebenen)
- Räumliche Analogisierung von Begriffen, Sätzen und Verfahren der ebenen Geometrie (z. B. die Analogisierung der Dreiecks- zur Tetraedergeometrie)
- Räumliche Behandlung der Kegelschnitte
- Darstellenden Geometrie
- Kugelgeometrie
- anwendungsorientiertes Modellieren mit synthetischer Raumgeometrie.

Außerdem kann die interaktive Nutzung der Raumgeometrie im virtuellen Raum als „dienende Magd“ die Darstellung innermathematischer (z. B. als Vorbereitung der räumlichen analytischen Geometrie) Sachverhalte bereichern.
Sowohl das interaktive raumgeometrische Konstruieren selbst als auch seine Anwendungen können helfen, die Leitidee „Raum und Form“ (vgl. KMK 2003, unter: http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/bildungsstandards.htm) auf attraktive Weise zu konkretisieren und die unter dieser Idee nicht explizit formulierte Raumvorstellungsfähigkeit zu entwickeln.

Beim Einsatz kognitiven Werkzeugs Cabri 3D für das interaktiven Konstruieren im virtuellen Raum verfolgen wir u. a. folgende allgemeine geometrische Lernziele:

- Geometrisches Sehen bzw. das „geometrische Auge“ schulen und den virtuellen Raum als Handlungsraum erfahren. (Wahrnehmungsphänomenologische Lernziele).
- Die Nützlichkeit der Raumgeometrie schätzen. (Affektives Lernziel)
- Raumgeometrisches Wissen (Begriffe, Aussagen und Verfahren) erwerben, anwenden und erweitern; die Raumvorstellung üben (Kognitive Lernziele)
- Geometrisierbare räumliche Phänomene experimentell explorieren und mittels heuritischer Strategien analysieren. (Metakognitive Lernziele)
- Geläufigkeit in der Nutzung eines 3D-Grafikwerkzeugs erlangen (Technisches Lernziel).

Das Arbeiten mit Cabri 3D kann die allgemeinen Methoden bzw. Arbeitsformen unterstützen, wie sie schon bei der Nutzung von Dynamischen 2D-Geometrie-systemen zur Anwendung kommen. Insbesondere können folgende allgemeine Methoden der Erkenntnisfindung eine Verstärkung erfahren:

- die *Visualisierung* statischer und dynamischer raumgeometrischer Informationen (z. B. zur Erfassung raumgeometrischer Phänomene)
- die *induktive Methode* (etwa durch Erzeugung einer Vielzahl von Beispielen durch Variation einer Figur)
- die *Analogiemethode* (z. B. zur Analogisierung zwischen ebener und räumliche Geometrie)
- *die Vernetzung bzw. Fusionierung* ebener und räumlicher Geometrie (z. B. bei Beweisen)

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

- die *operative Methode* (z. B. durch Invarianzuntersuchungen)
- das *experimentelle Arbeiten* (als eine propädeutische Arbeitsweise in der Geometrie – Vive le bricoleur!)
- die *Komplexitätsreduktion* (z. B. durch Ausblenden von Objekten)
- das *modulare Arbeiten* (etwa durch Verwenden von Formmodulen)
- das *Rückwärtsarbeiten* (z. B. durch Benutzung der Undo- und Redo-Funktion).

Das Beherrschen der mit den entsprechenden Computerwerkzeugen ausführbaren ebenen geometrischen Konstruktionen ist auf die raumgeometrischen auszudehnen, um eine zeitgemäße Methodenkompetenz im Rahmen des allgemeinbildenden Mathematikunterrichts zu sichern.
Unseres Erachtens ist das geometrische Konstruieren im virtuellen Raum ein Meilenstein auf dem Wege der Nutzung des Computers beim Lehren und Lernen von Raumgeometrie.

Literatur

Bainville, E., Laborde, J.-M. (2004): Cabri 3D 1.0. (Software). Grenoble: Cabrilog. Deutsche Version (Bearbeitung von H. Schumann) zu beziehen von www.cotec.de
Bieberbach, L. (1952): Theorie der geometrischen Konstruktionen. Basel: Birkhäuser
Graf, U. (1964): Darstellende Geometrie. Bearbeitet von M. Barner. Heidelberg: Quelle & Meyer
Götze, H. (1991): Die Baugeometrie von Castel del Monte. München: Prestel
Holland, G. (1996): Geometrie in der Sekundarstufe. 2. Auflage. Heidelberg: Spektrum
Quaisser, E. ; Sprengel, H.-J. (1989): Geometrie in Ebene und Raum. Berlin: DVW
Wolff, G. (Hrsg.) (1966): Handbuch der Schulmathematik. 2. Auflage. Hannover: Schroedel
Schumann, H. (1991): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. Stuttgart: Metzler-Teubner
Schumann, H. (2001): Raumgeometrie-Unterricht mit Computerwerkzeugen. Berlin: Cornelsen
Schumann, H. (2004a): Entdeckung von Analogien mit Cabri 3D am Beispiel „Dreieck – Tetraeder“. In: math. did. 27, Bd. 1, S. 82-99
Schumann, H. (2004b): Konstruktion von Polyedermodellen mit Cabri 3D im Umfeld der platonischen Körper. In: Beiträge zum Computereinsatz in der Schule. Jg. 18, Heft 2, S. 3-48
Schumann, H. (2005a): Dynamische Raumgeometrie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005. Hildesheim: Franzbecker
Schumann, H. (2005b): Interaktives geometrisches Modellieren im virtuellen Raum mit Cabri 3D. In: LOG IN – Informatische Bildung und Computer in der Schule, Heft 133, S. 55-61
Schumann, H. (2005c): Eine dynamische Behandlung der Kegelschnitte mit Cabri 3D. Erscheint in: MNU Jg. 58, Heft 6
Thaer, C. (Hg.) (1980): Euklid. Die Elemente. Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany