

Parallelprojektive Schattenbilder von Körpern mit Cabri 3D

Vorbereitung: die Parallelprojektion

Mit Cabri 3D kann man nicht nur räumliche Abbildungen und ihre Eigenschaften im virtuellen Raum visualisieren, sondern auch die Parameterobjekte der Abbildungen und die abzubildenden Konfigurationen nach Lage und Größe durch Verziehen variieren.

Eine Abbildung des Raumes auf eine Ebene ε (Projektionsebene) nennt man Parallelprojektion, wenn es eine nicht zu ε parallele Gerade p gibt, so dass für jeden Originalpunkt P des Raumes und dessen Bildpunkt P' in ε gilt:

Falls P nicht in ε liegt, so ist die Gerade PP' parallel zu p , andernfalls ist P' gleich P . Die Lage von p legt die so genannte Projektionsrichtung fest.

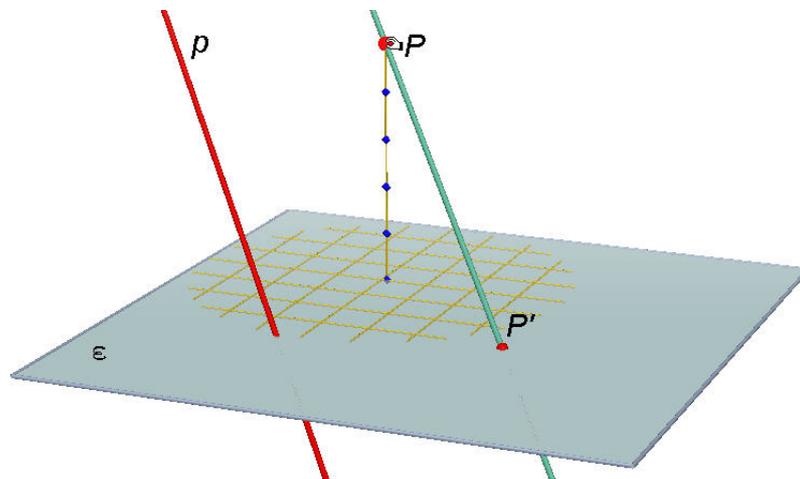


Abb. 1

Parallelprojektionen haben u. a. folgende Eigenschaften:

- 1) Geraden, die nicht in Projektionsrichtung liegen, werden auf Geraden abgebildet.

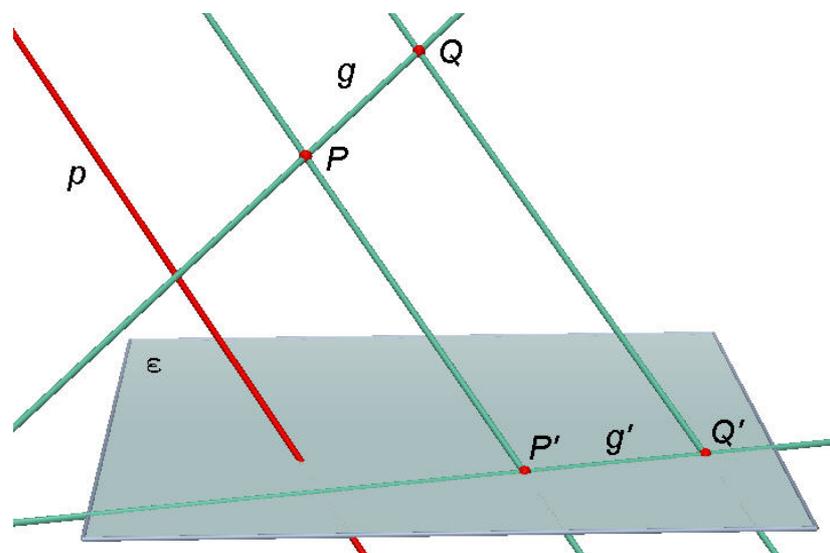


Abb. 2

- 2) Einander parallele Objekte, die nicht in Projektionsrichtung liegen, werden auf parallele Objekte abgebildet.

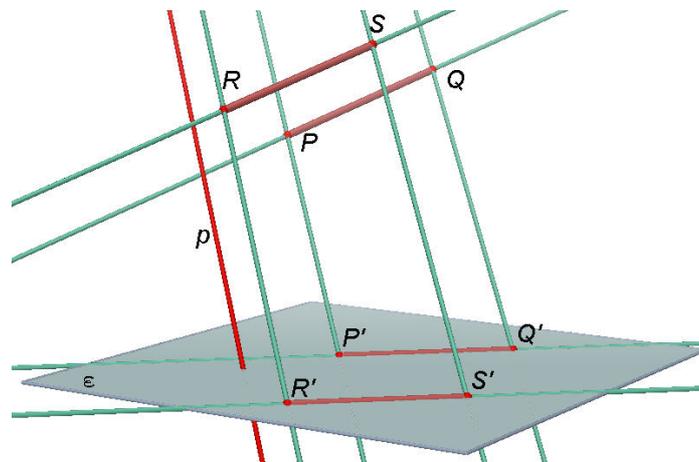


Abb. 3

- 3) Liegt eine Strecke (ein Winkel) in einer zur Projektionsebene parallelen Ebene, so wird diese (dieser) auf eine kongruente Strecke (einen kongruenten Winkel) abgebildet.

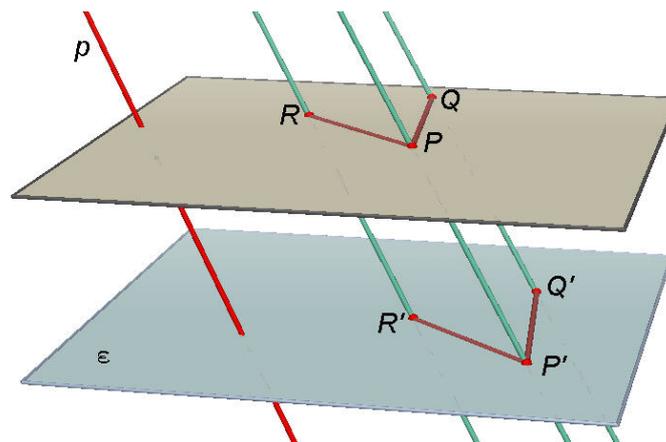


Abb. 4

- 4) Teilt ein Punkt eine nicht in Projektionsrichtung liegende Strecke in einem bestimmten Verhältnis, so auch sein Bildpunkt die Bildstrecke in demselben Verhältnis („Teilverhältnistreue“). Mittelpunkte werden also auf Mittelpunkte abgebildet.

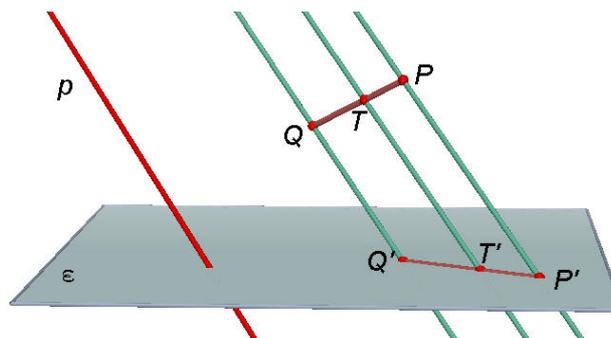


Abb. 5

Ein wesentlicher Satz über Parallelprojektionen ist der Satz von Pohlke (Karl Wilhelm Pohlke 1810-1876):

Für jedes ebene „Dreibein“ $O'A'B'C'$ gibt es eine Parallelprojektion, so dass dieses das Bild eines räumlichen Dreibeins $OABC$ ist, dessen gleichlangen Strecken paarweise senkrecht stehen (orthonormiertes Dreibein).

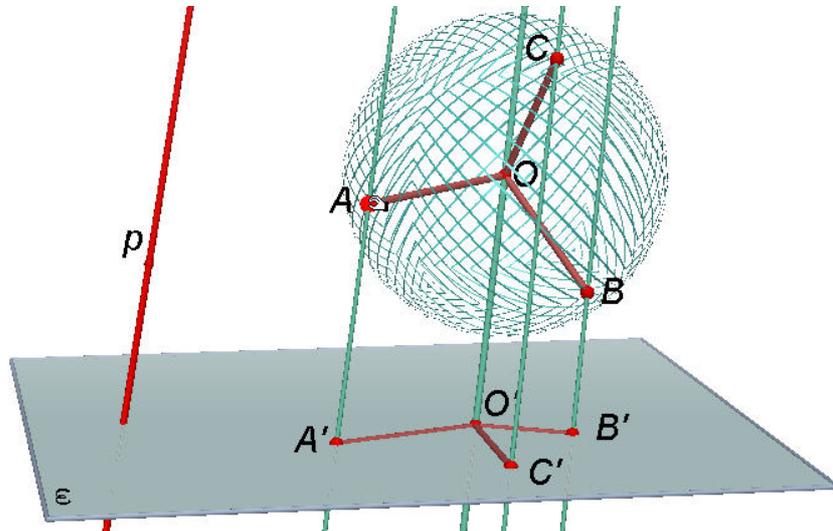


Abb. 6

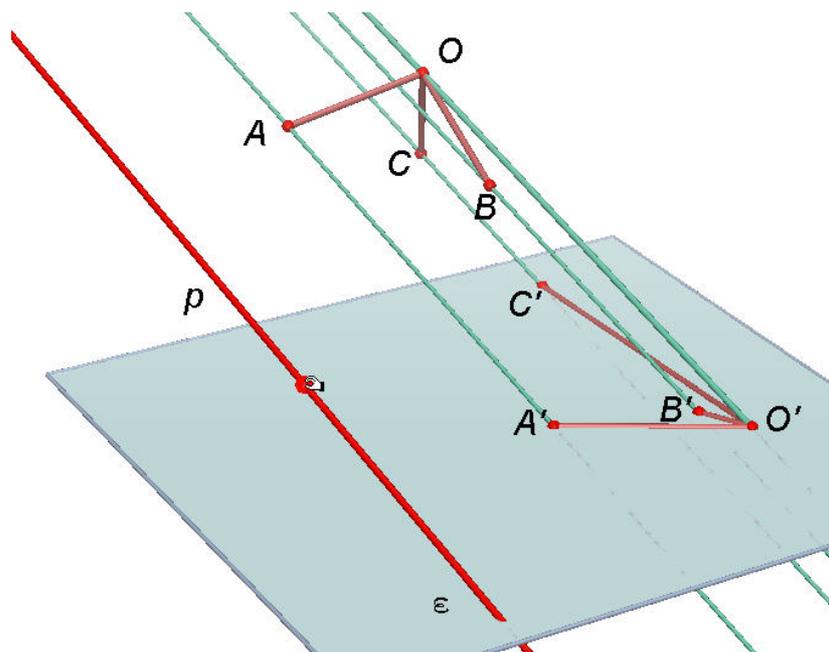


Abb. 7

Der Satz von Pohlke liefert u. a. die Begründung dafür, dass bei ebenen Darstellungen räumlicher Objekte, etwa bei Handskizzen, für das parallelprojektive Bild eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems als Bezugssystem die x-y-z-Achsenrichtungen und ihre Maßeinheiten willkürlich gewählt werden können.

Die Parallelprojektion kann als Grenzfall der Zentralprojektion aufgefasst werden, wenn der Zentralpunkt zu einem Fernpunkt, d. h. einem im „Unendlichen“ liegenden Punkt wird.

Parallelprojektive Körperschatten

Zur geometrischen Modellierung des Schattenwurfs als Schlagschatten von physischen Objekten bei Sonnenlicht bzw. bei weit entfernter Lichtquelle dient uns die Parallelprojektion.

Dabei wird nicht nur auf eine Ebene parallel projiziert, sondern auch auf mehrere Ebenen bzw. sogar auf nicht ebene Flächen.

Im folgenden behandeln wir auf exemplarische Weise vor allem die Modellierung des Schattenwurfs des Würfels als Vollkörper bzw. als Kantenkörper.

Mit Cabri 3D kann man sowohl die Projektionsrichtung als auch die Lage und Größe des schattenwerfenden Objekts variieren, um die betreffenden Schattenänderungen zu beobachten. Die Projektionsrichtung und die Richtung aus der das Licht kommt werden durch einen Pfeil symbolisiert.

In Abbildung 8 wirft ein Würfel als Vollkörper seinen Schatten auf die Standebene (Projektionsebene). Es ist nur das Schatten-Umrisspolygon zu zeichnen. Durch Richtungsänderung des Pfeils wird der Schatten verändert.

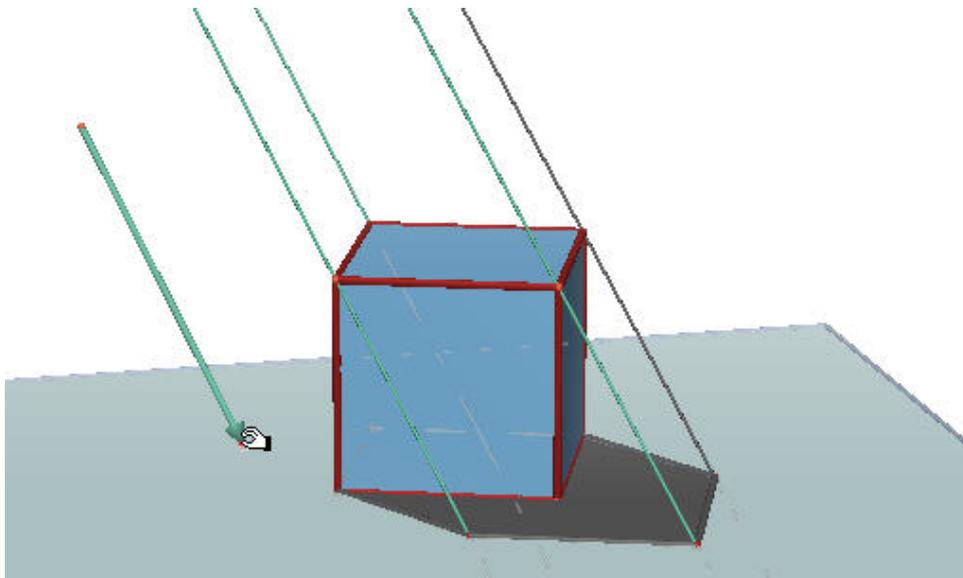


Abb. 8

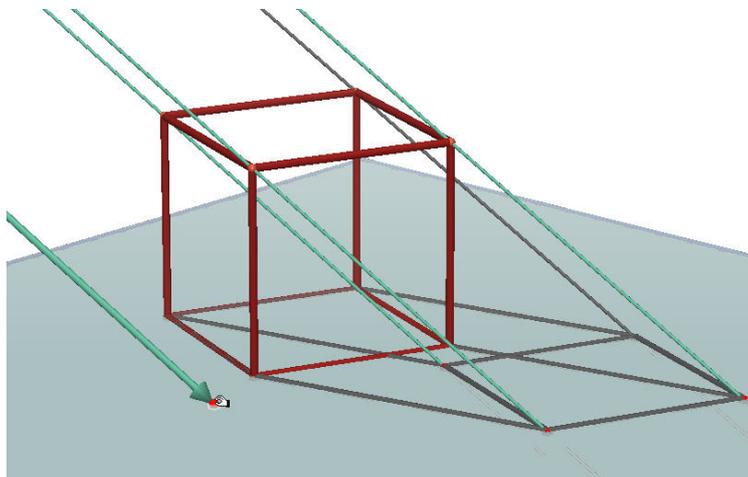


Abb. 9

In Abbildung 9 wirft der Kantenwürfel seinen Schatten auf die Standebene. Hier muss für mehr Bildecken überlegt werden, welche mit Schattenkanten zu verbinden sind. So genannte Schrägbilder des Würfels ergeben sich, wenn eine Würfel­fläche parallel zu der Ebene ist, auf die der Schatten geworfen wird (Abb. 10). Je nach Variation der Licht­richtung erscheinen die Schatten der zur Projektionsebene senkrecht stehenden Kanten verkürzt, gleichlang oder verlängert.

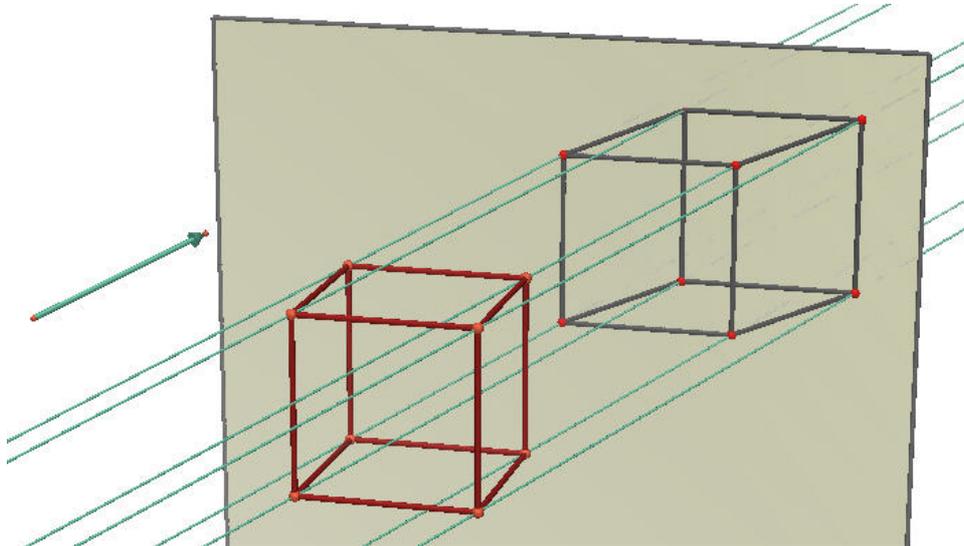


Abb. 10

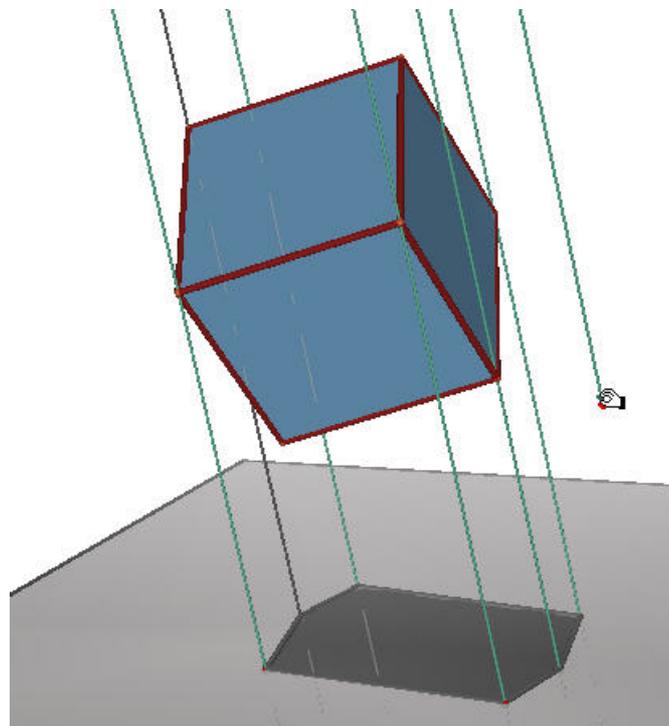


Abb. 11

Bei beliebiger Lage des Würfels kann sich ein seitenparalleles Sechseck (Warum?) als Schattenpolygon ergeben (Abb. 11/12). Die Konstruktion der Schattenkanten eines entsprechenden Kantenwürfels erfordert mehr Raumvorstellung (Abb. 13).

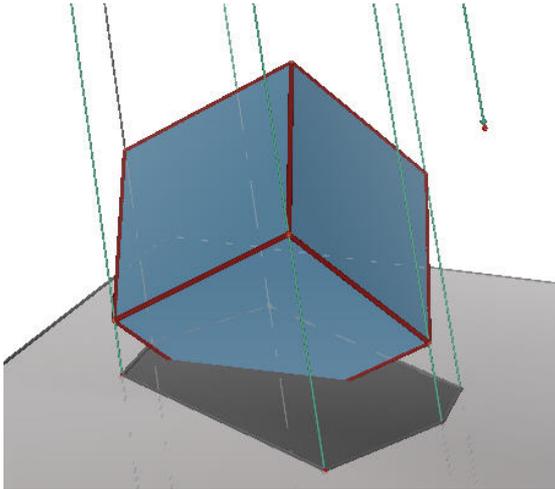


Abb. 12

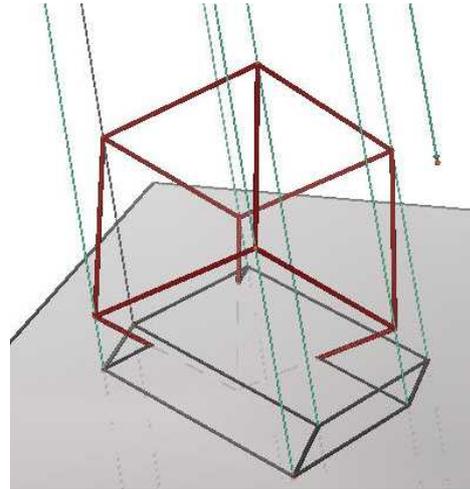


Abb. 13

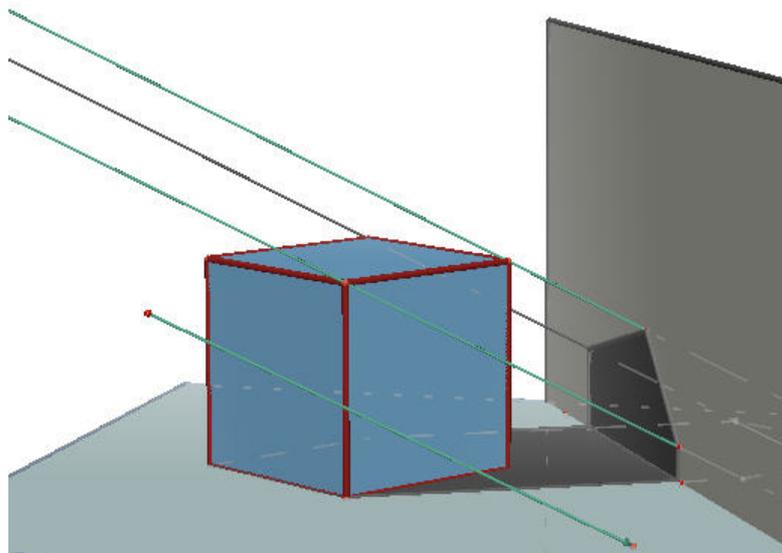


Abb. 14

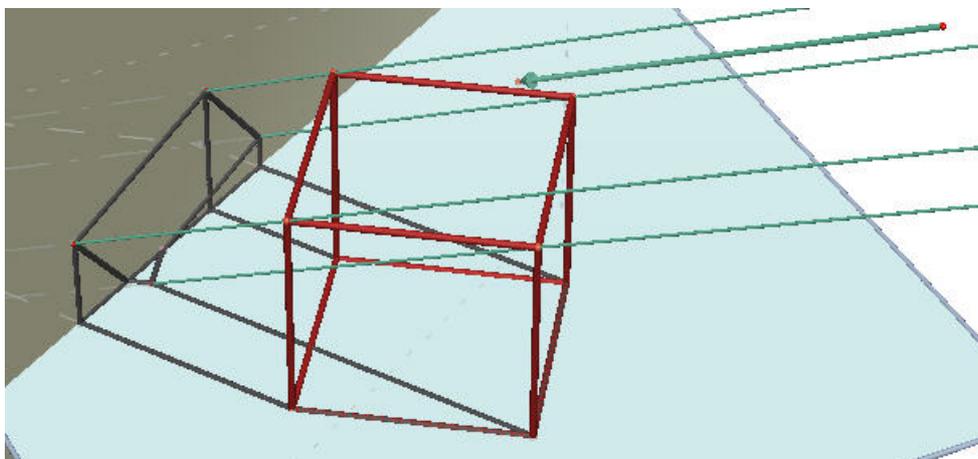


Abb. 15

Der Würfelschatten auf Standebene und auf eine sie schneidende Ebene ist im Fall des Vollkörpers nicht schwer (Abb. 14). Beim Kantenmodell konstruieren wir den Schatten, indem wir Ebenen durch Originalkanten parallel zur Projektionsrichtung mit den Projektionsebenen zum Schnitt bringen (Abb. 15).

Für differenziertere Polyeder ist der Konstruktionsaufwand größer; auch nimmt die Raumvorstellungsbeanspruchung zu (Abb. 16, Schatten des regulären Kantendodekaeders).

Zur Kontrolle drehen wir die Raumszene so, dass wir mit den Lichtstrahlen blicken und zu jeder der Kanten bzw. Seitenpolygone das entsprechende Schattenobjekt erkennen (Abb. 17).

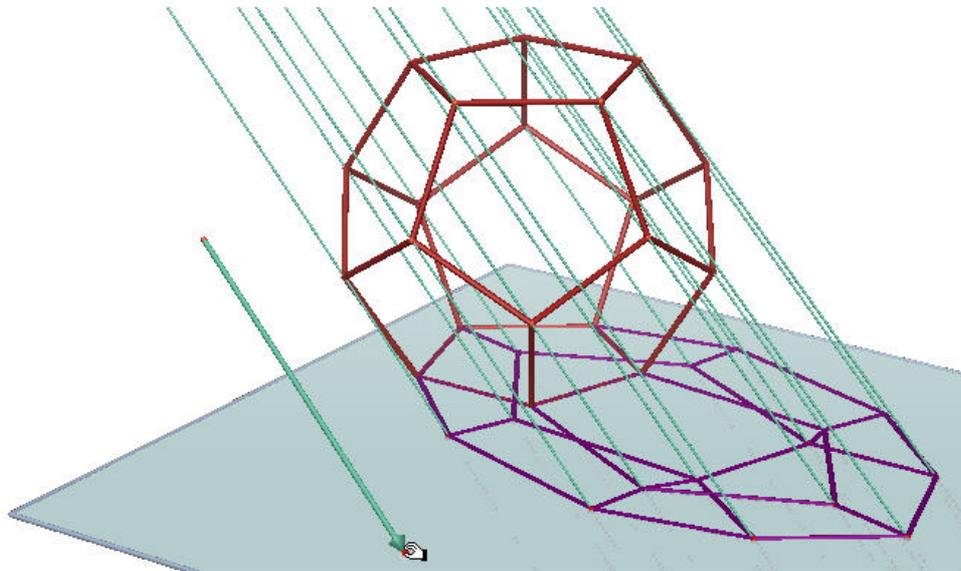


Abb. 16

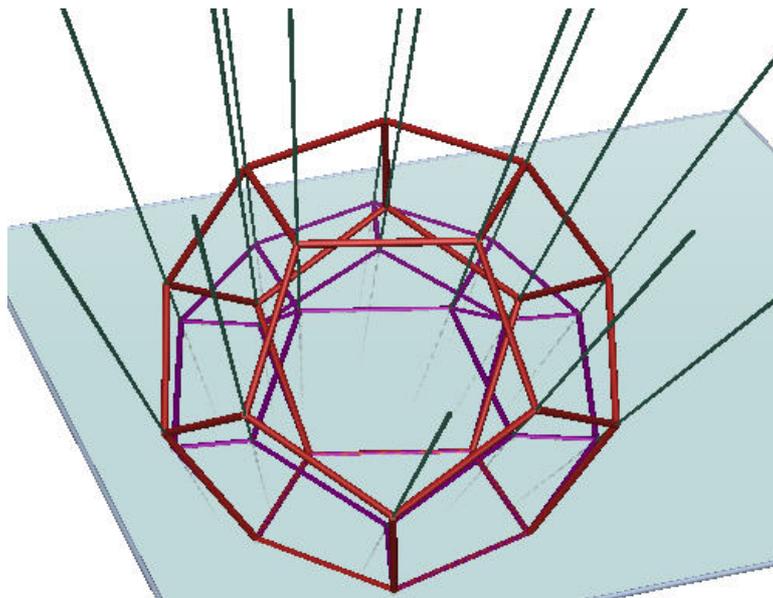


Abb. 17

Wir steigern nun das konstruktive Niveau und die Anforderungen an die Raumvorstellung, indem wir einen Körper auf einen andern projizieren, z. B. einen Kantenwürfel auf ein Dodekaeder (Abb. 18); auch hier prüft man das Ergebnis der Konstruktion durch entsprechendes Drehen der Szene (Abb. 19); deutlich ist der Schattenwürfel zu sehen.

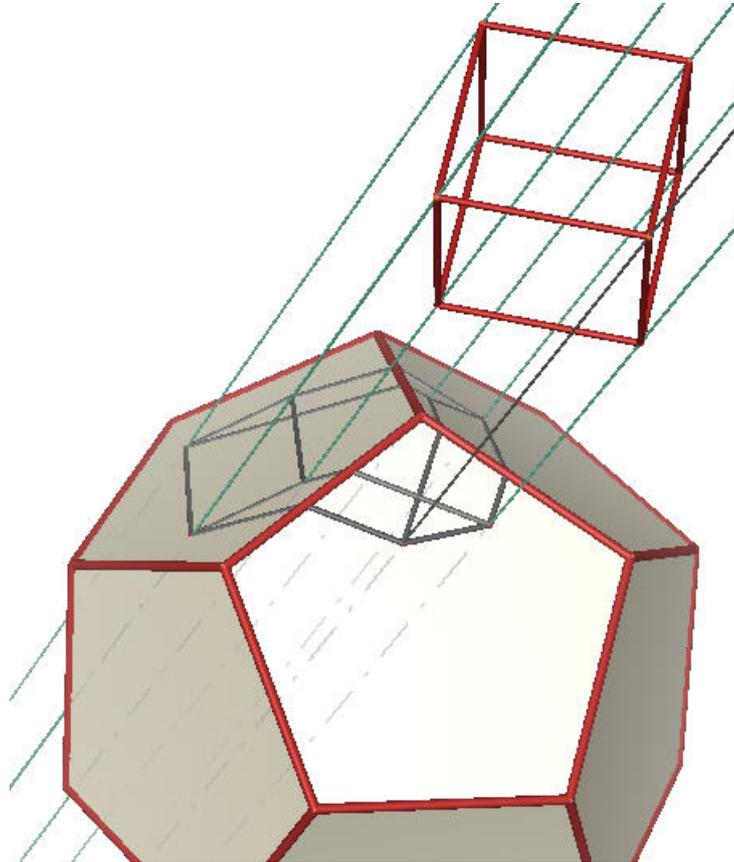


Abb. 18

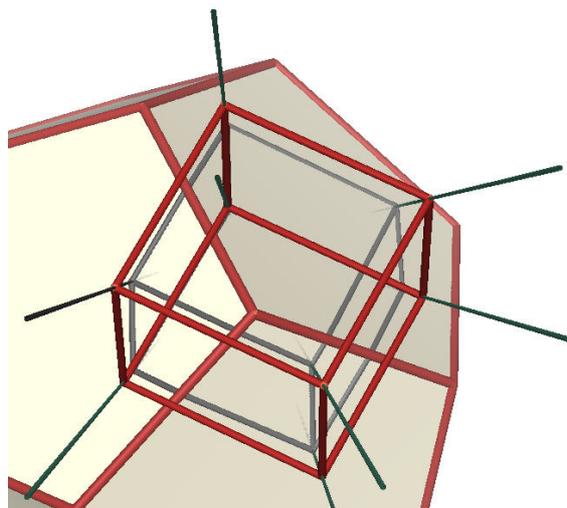


Abb. 19

Abbildung 20 zeigt die Parallelprojektion eines Würfels auf eine Kugel. Bei der Konstruktion sind entsprechende Ebenen mit der Kugel zu schneiden. Die Schattenkanten sind Kreisbögen, die sich mit Cabri 3D in der Version 1.0 nur als Streckenzüge approximieren lassen.

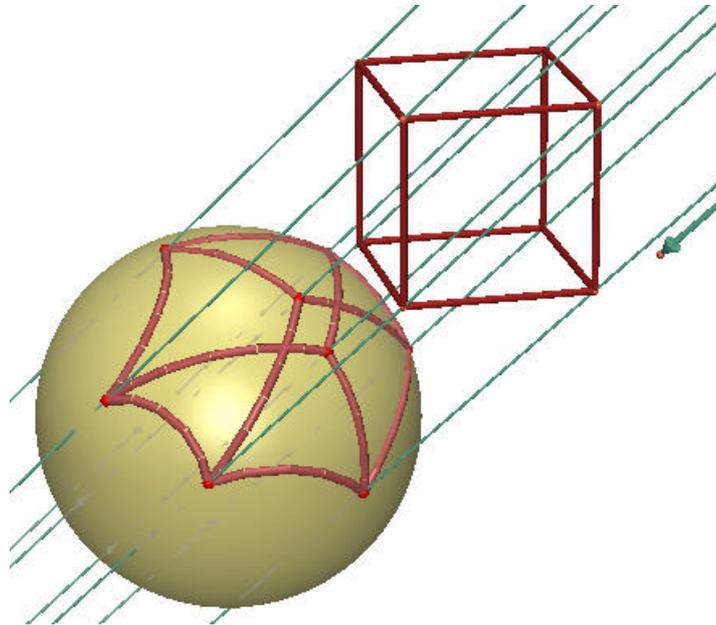


Abb. 20

Wir schließen unsere exemplarische Behandlung von parallelprojektiven Schattenbildern im virtuellen Raum mit der Konstruktion des Kugelschattens auf einen Würfel und dessen Standebene (Abb. 21). Die Schattenränder konstruiert man als Schnittlinien des Schattenzylinders mit dem Würfel und seiner Standebene. Die Schnittlinien sind Ellipsenbögen.

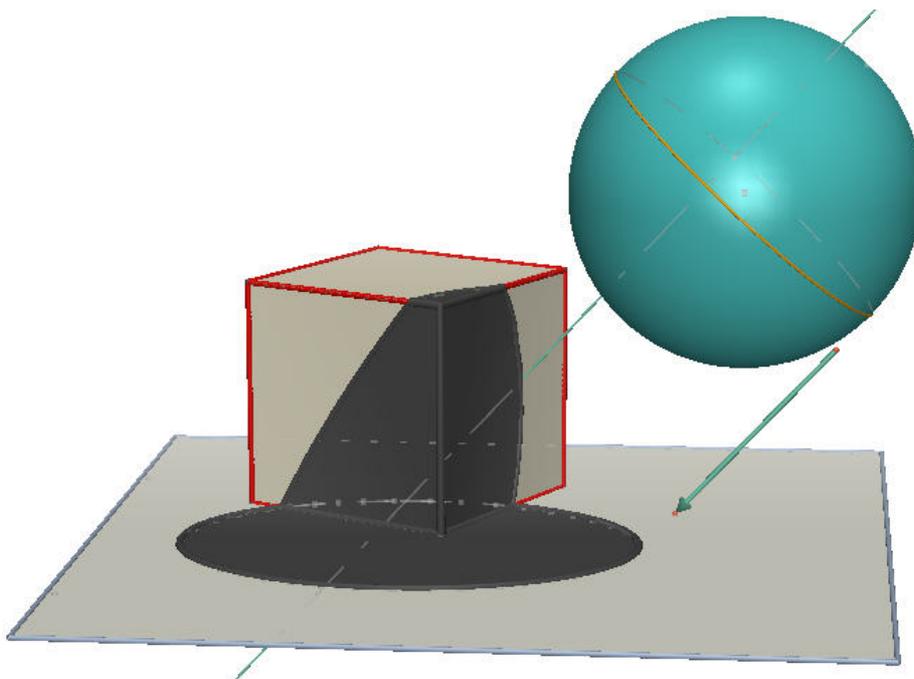


Abb. 21

Literatur

Laborde, J. M.; Bainville, E. (2004) : Cabri Géomètre 3D (Version 1.0). Grenoble: Cabrilog

Schumann, H. (2005): Dynamische Raumgeometrie. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005

Wolff, G. (Hrsg.) (1966): Handbuch der Schulmathematik. 2. Auflage. Hannover: Schroedel

http://www.math-inf.uni-greifswald.de/mathematik+kunst/kuenstler_pohlke_beweis.html