Heinz Schumann

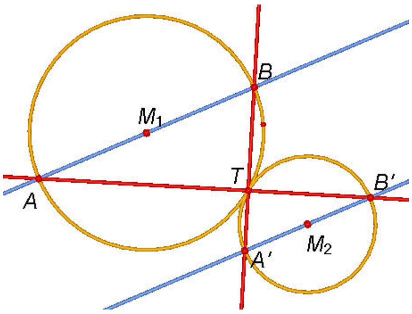
Materialien für die konstruktive Analogisierung ebener Geometrie im virtuellen Raum (2)

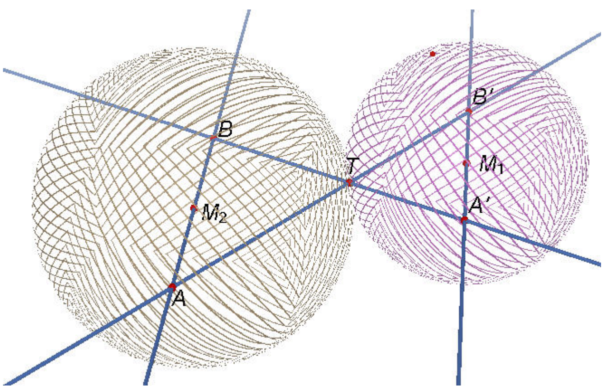
„Analoge Dinge stimmen in gewissen Beziehungen zwischen ihren entsprechenden Teilen miteinander überein.“
G. Pólya

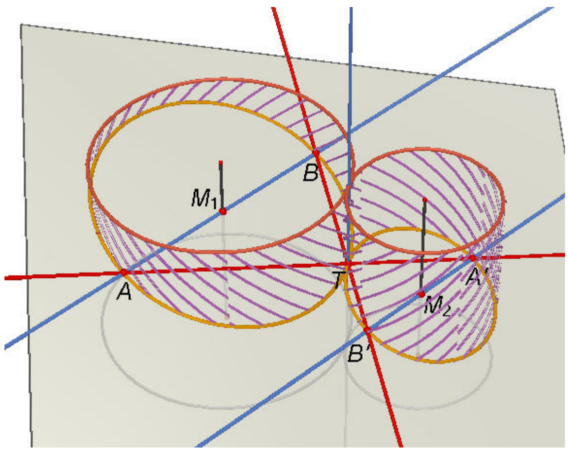
Die Analogisierung ist eine effektive und weitreichende Methode der Erkenntnisgewinnung. Deshalb wird ihre explizite Vermittlung im Mathematikunterricht neben der anderer heuristischer Methoden immer wieder gefordert. Die an Analogien reiche Elementargeometrie, insbesondere die Analogien zwischen ebener und räumlicher Geometrie, eignen sich besonders wegen ihrer Anschaulichkeit als Übungsfeld für das Analogisieren in den Sekundarstufen. Analogisierung im Verbund mit der induktiven Methode führen zur Bildung geometrischer Aussagen. Mit den Konstruktions- und Visualisierungsmöglichkeiten, die Cabri 3D bietet, kann man die räumliche Analogisierung ebener Geometrie konstruktiv praktizieren.
Im folgenden sollen weitere ausgewählte konstruktive Analogiebildungen aufgelistet werden.

11. Analogiebildungen zu Konfigurationen aus zwei Kreisen

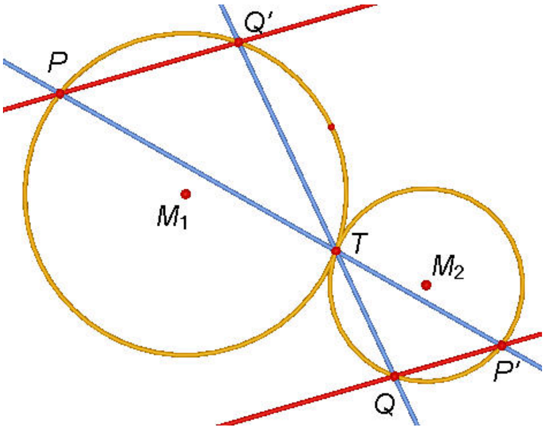
11.1 Legt man in zwei einander berührenden Kreisen (Kugeln) zwei parallele Durchmesser, so gehen zwei Verbindungsgeraden von Endpunkten dieser Durchmesser durch den Berührungspunkt und die Verbindungsgeraden stehen im rechten Winkel.
Affine Verallgemeinerung: Werden zwei sich längs einer Mantellinie berührende Kreiszylinder von einer Ebene geschnitten, so gehen die Verbindungsgeraden von Endpunkten zweier Durchmesser der Schnittellipsen durch deren Berührungspunkt.

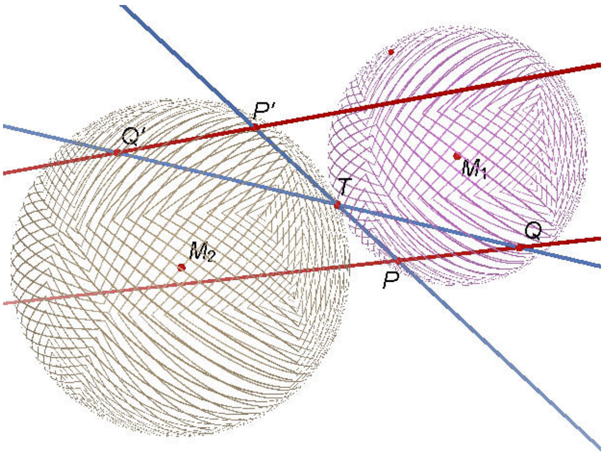


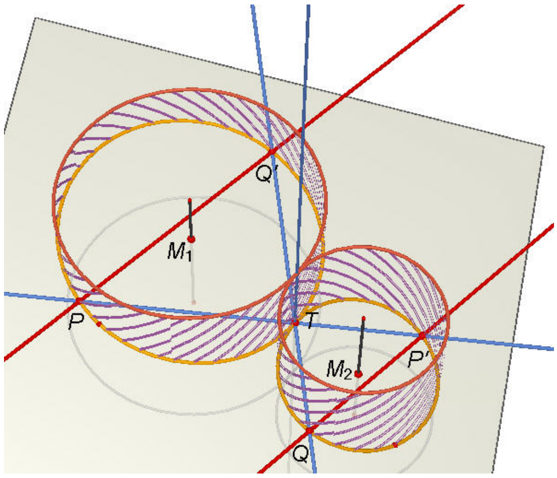




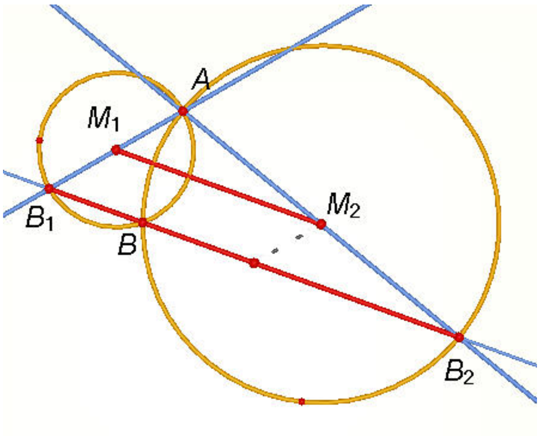
11.2 Legt man durch den Berührungspunkt zweier sich berührender Kreise (Kugeln) zwei Geraden, so sind die Verbindungsgeraden der entsprechenden Schnittpunkte dieser Geraden parallel.
Affine Verallgemeinerung: Werden zwei sich längs einer Mantellinie berührende Kreis-zylinder von einer Ebene geschnitten und legt man durch den Berührungspunkt der Schnittellipsen zwei Geraden in diese Ebene, so sind die Verbindungsgeraden der entsprechenden Schnittpunkte dieser Geraden parallel.

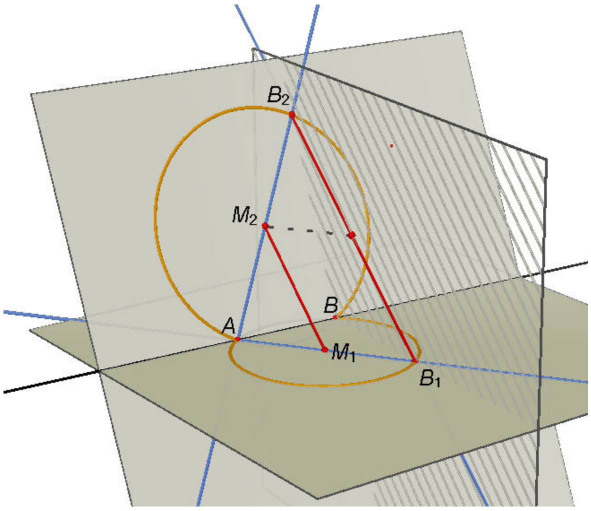


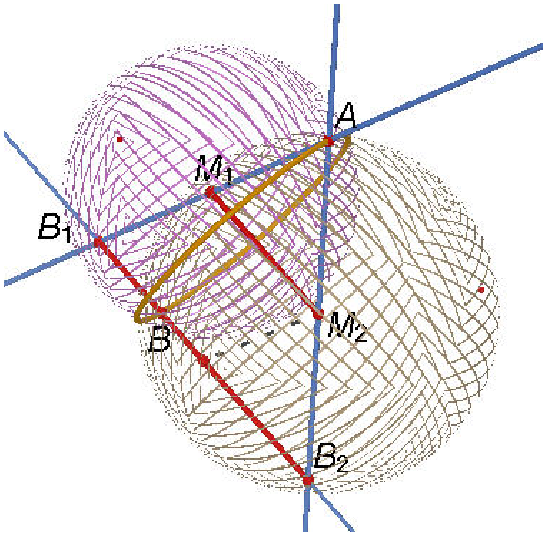


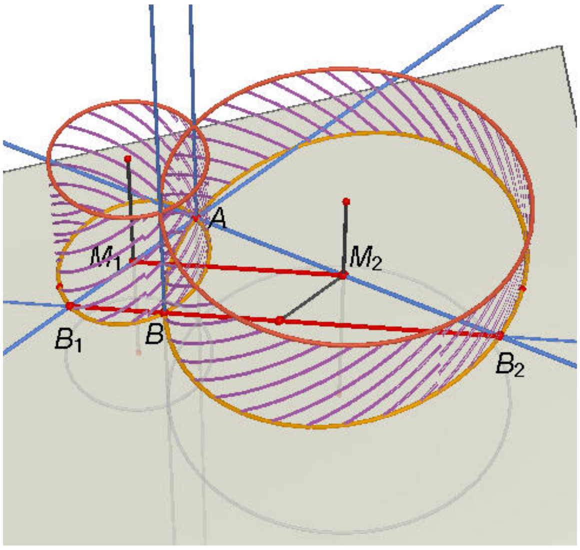


11.3 Legt man durch einen der Schnittpunkte zweier einander schneidender Kreise (Kugeln) die Durchmesser, so geht die Verbindungsgerade der entsprechenden Endpunkte der Durchmesser durch den zweiten Schnittpunkt. Diese Verbindungsgerade ist parallel zur Verbindung der Mittelpunkte der Kreise(Kugeln). Die betreffende Verbindungsstrecke ist doppelt so lang wie der Mittelpunktsdistanz.
Affine Verallgemeinerung: Werden zwei sich längs zweier Mantellinien schneidende Kreiszylinder von einer Ebene geschnitten und legt man durch einen der Schnittpunkte der zwei Schnittellipsen die Durchmesser, so geht die Verbindungsgerade der entsprechenden Endpunkte der Durchmesser durch den zweiten Schnittpunkt. Diese Verbindungsgerade ist parallel zur Verbindung der Mittelpunkte der Ellipsen. Die betreffende Verbindungsstrecke ist doppelt so lang wie der Mittelpunktsdistanz..

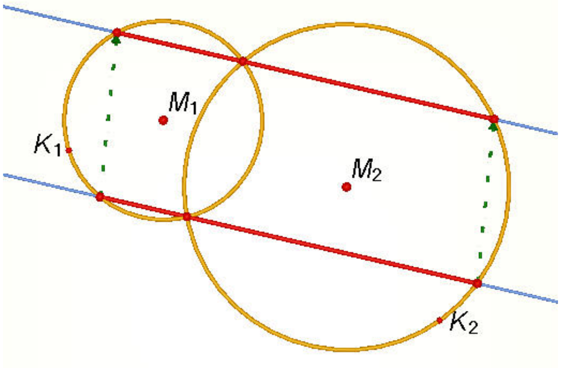


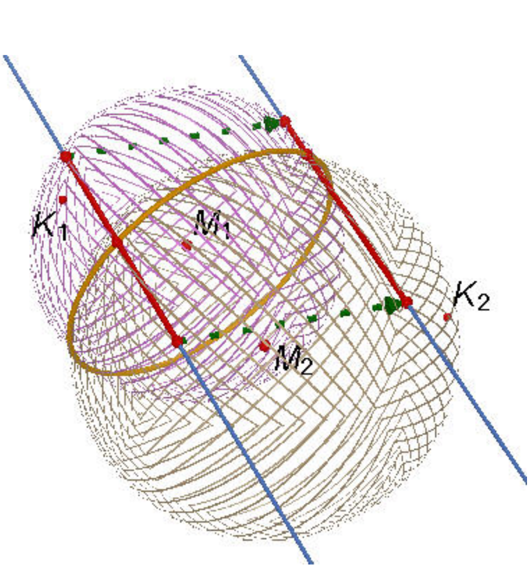


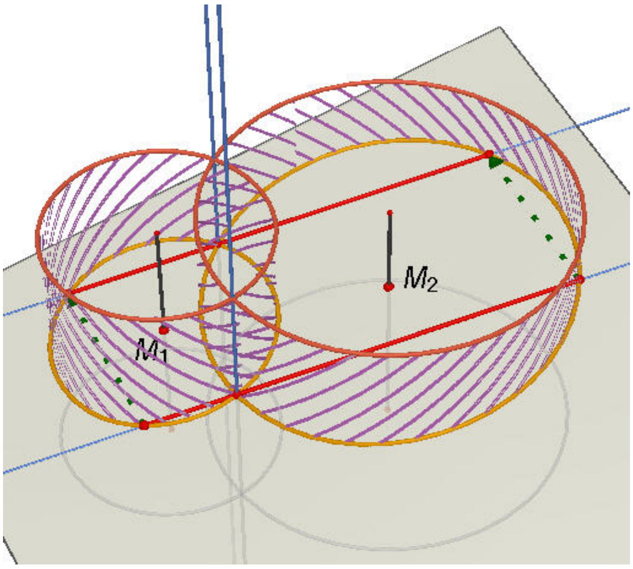




11.4 Werden durch die gemeinsamen Punkte zweier einander schneidender Kreise (Kugeln) zwei parallele Geraden gelegt, so sind die zu diesen Geraden gehörenden Sehnen, gebildet aus beiden Kreisen (Kugeln), gleichlang.
Affine Verallgemeinerung: Werden zwei sich längs zweier Mantellinien schneidende Kreiszylinder von einer Ebene geschnitten und legt man durch die gemeinsamen Punkte der Schnittellipsen zwei parallele Geraden in diese Ebene, so sind die zu diesen Geraden gehörenden Sehnen, gebildet aus beiden Ellipsen, gleichlang.

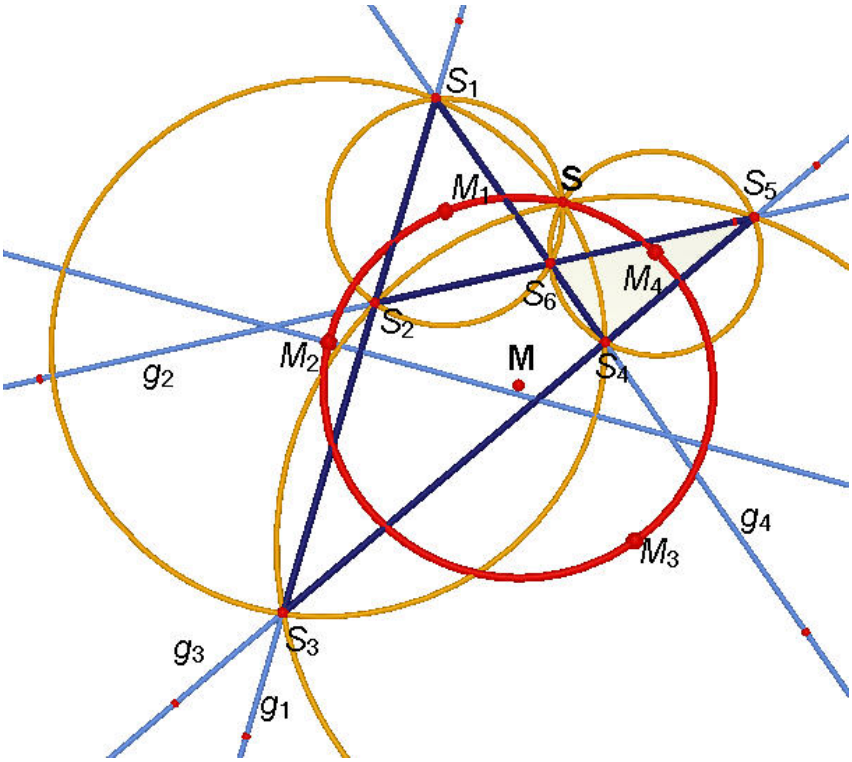




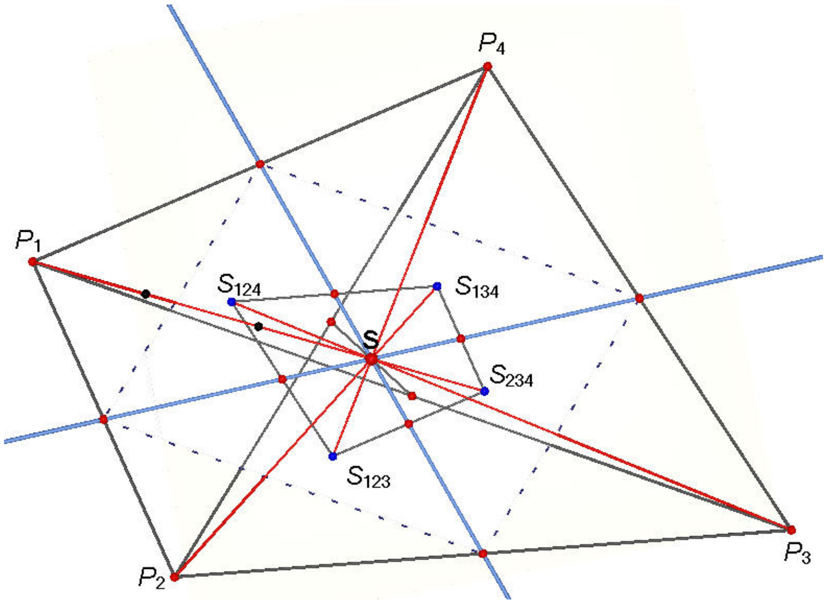


12. Eine Konfiguration aus vier Kreisen

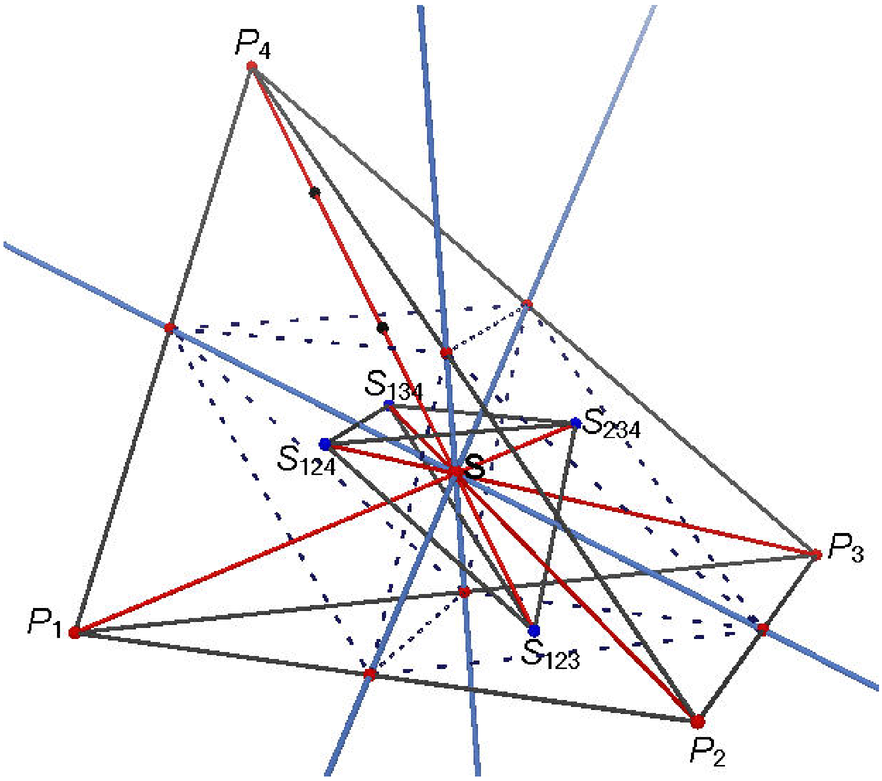
Satz: Werden aus vier in einer Ebene liegenden Geraden die vier möglichen Dreiecke gebildet, so gehen deren Umkreise durch einen Punkt, und dabei liegt dieser Punkt mit den Mittelpunkten der vier Kreise auf einem Kreis.
Räumliches Analogon: Aus fünf gegebenen Ebenen, von denen keine vier einen Punkt gemeinsam haben, lassen sich fünf Tetraeder bilden. Die Umkugeln dieser Tetraeder gehen zu vieren durch fünf auf den fünf gegebenen Ebenen liegenden Punkte. Mit diesen fünf Punkten lassen sich fünf Kugeln bilden, die Umkugeln der fünf Tetraeder sind.



13. Analogisierung von Schwerpunktkonfigurationen

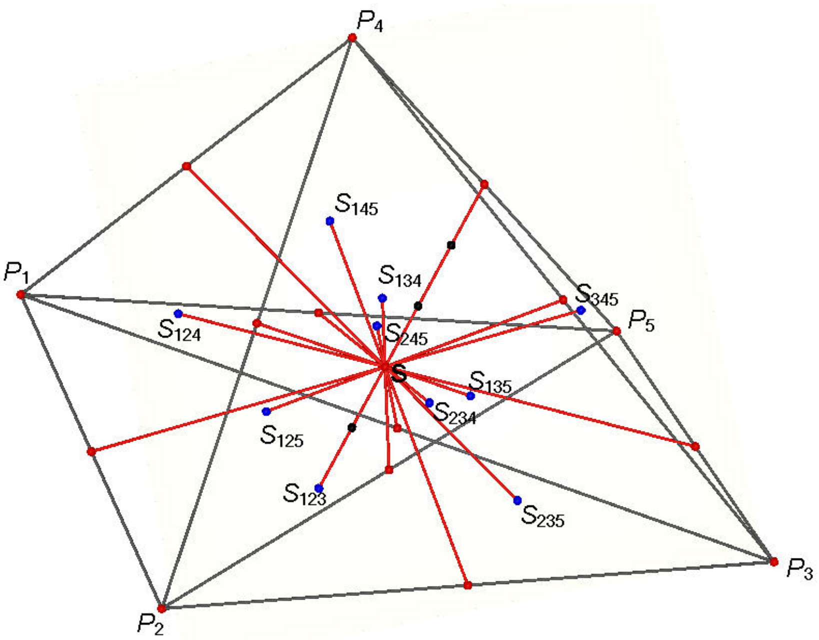


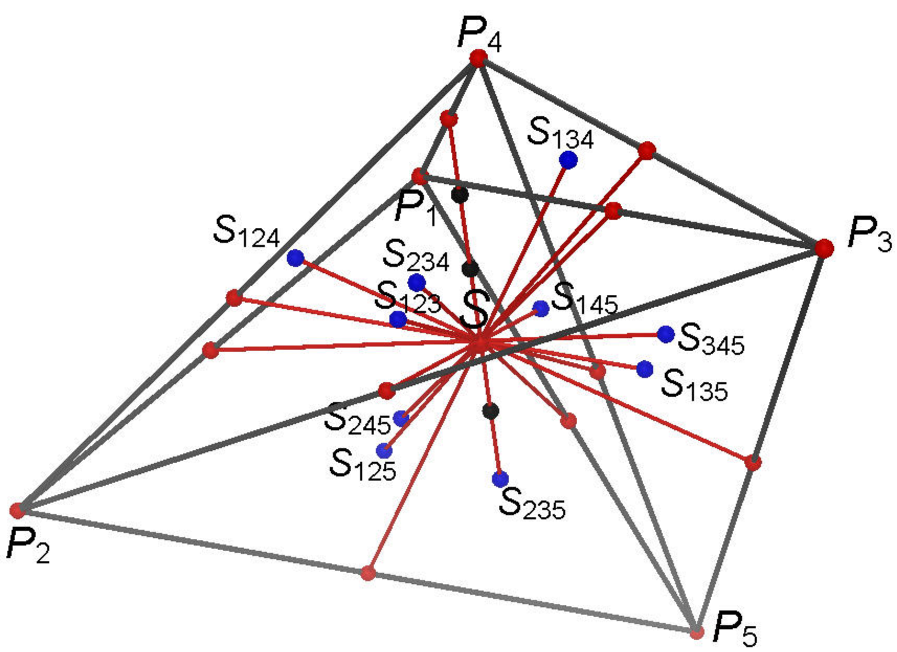
13.1 Aus vier in einer Ebene gegebenen Punkten,von denen keine drei auf einer Geraden liegen, lassen sich vier Dreiecke bilden. Verbindet man den Schwerpunkt eines jeden dieser Dreiecke mit dem restlichen Punkt, so gehen die entstehenden vier Strecken alle durch einen Punkt und werden von diesem im Verhältnis 3:1 geteilt. Dieser Punkt ist das Ähnlichkeitszentrum bezüglich des Verbindungsvierecks der gegebenen Punkte und des Verbindungsvierecks der Schwerpunkte. Bei Iteration der Konstruktion zieht sich die Folge der Schwerpunktvierecke auf dieses Zentrum zusammen.



Räumliches Analogon zu 13.1: Aus vier im Raum gegebenen Punkten, die nicht in einer Ebene liegen, lassen sich vier Dreiecke bilden. Verbindet man den Schwerpunkt eines jeden dieser Dreiecke mit dem restlichen Punkt, so gehen die entstehenden vier Strecken alle durch einen Punkt und werden von diesem im Verhältnis 3:1 geteilt. Dieser Punkt ist das Ähnlichkeitszentrum bezüglich des Verbindungsvierflachs (Tetraeders) der gegebenen Punkte und des Verbindungsvierflachs der Schwerpunkte. Bei Iteration der Konstruktion zieht sich die Folge der Schwerpunktvierecke auf dieses Zentrum zusammen.

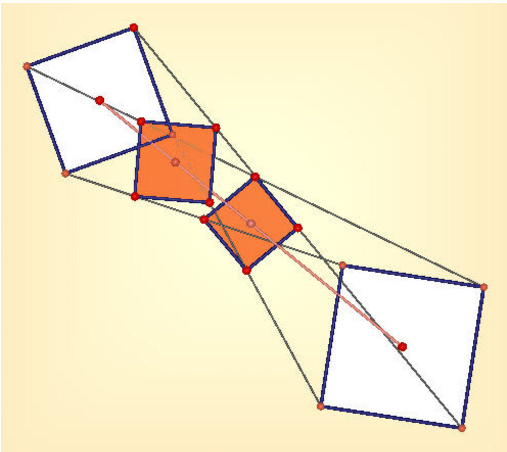
13.2 Aus fünf in einer Ebene oder im Raum gegebenen Punkten, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, lassen sich zehn Dreiecke bilden. Verbindet man den Schwerpunkt eines jeden dieser Dreiecke mit dem Mittelpunkt der zwei restlichen Punkte, so gehen die entstehenden zehn Strecken alle durch einen Punkt und werden von diesem im Verhältnis 3:2 geteilt.

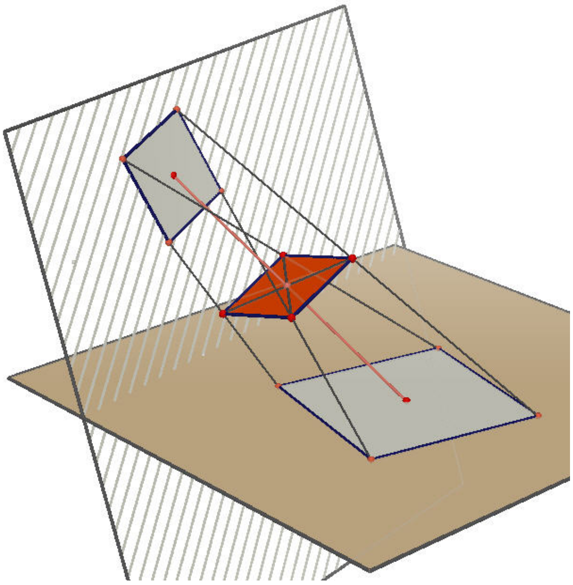


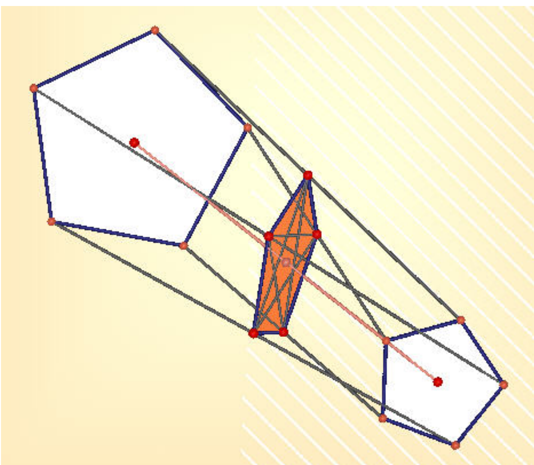


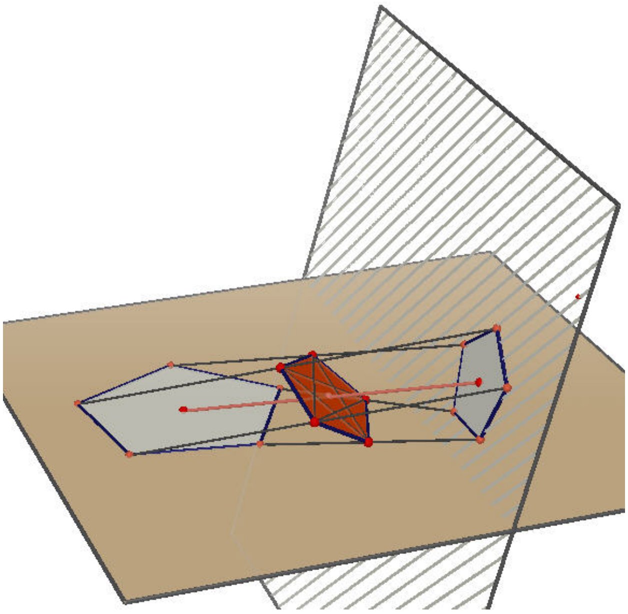
14. Teilpunkt-Vieleck aus regelmäßigen Vielecken

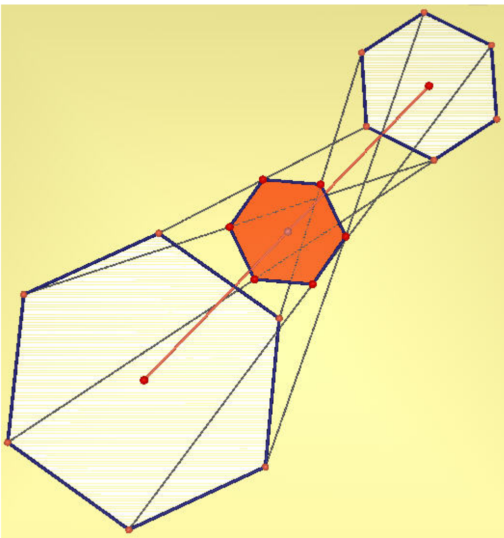
Satz: Verbindet man zyklisch die Eckpunkte zweier regulärer n-Ecke in der Ebene, so ist das n-Eck aus den Mitten der Verbindungsstrecken wieder ein reguläres n-Eck, wenn die Ecken gleichsinnig durchlaufen werden, andernfalls ein affin-reguläres n-Eck.
(Ein n-Eck ist affin-regulär, wenn es eine affine Abbildung gibt, die es auf ein reguläres n-Eck abbildet.)
Räumliches Analogon: Verbindet man zyklisch die Eckpunkte zweier regulärer n-Ecke im Raum, so ist das n-Eck aus den Mitten der Verbindungsstrecken stets ein affin-reguläres n-Eck.
Verallgemeinerung: Verbindet man zyklisch die Eckpunkte zweier regulärer n-Ecke in der Ebene, so ist das n-Eck aus den gleichartigen Teilpunkten der Verbindungs-strecken ein affin-reguläres n-Eck.
Räumliches Analogon: Verbindet man zyklisch die Eckpunkte zweier regulärer n-Ecke im Raum, so ist das n-Eck aus den gleichartigen Teilpunkten der Verbindungs-strecken ein affin-reguläres n-Eck.

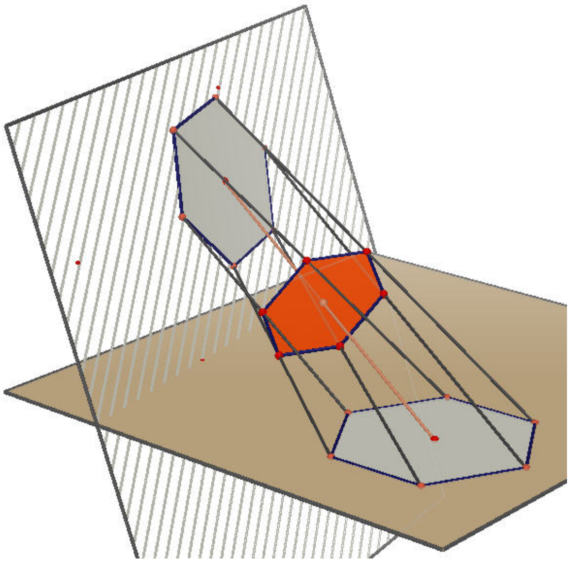


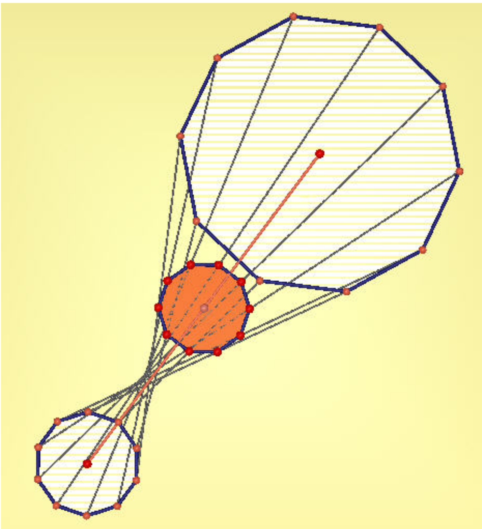


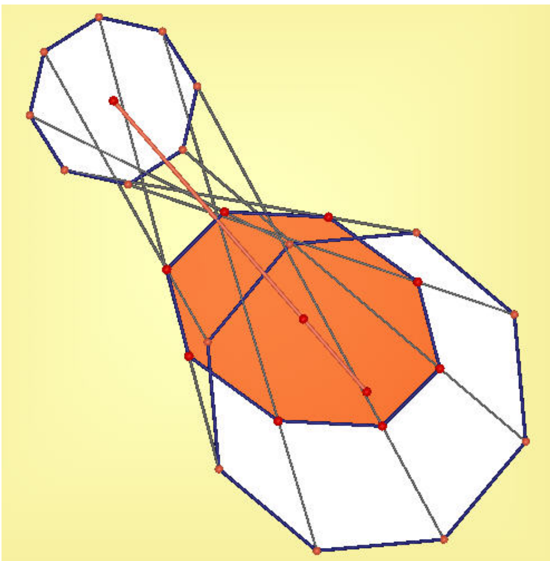


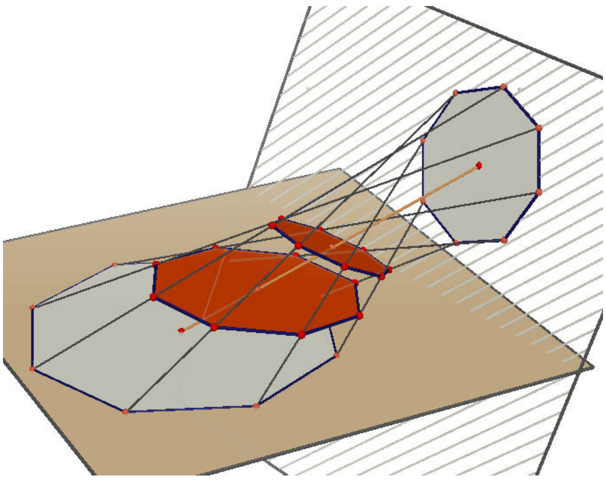




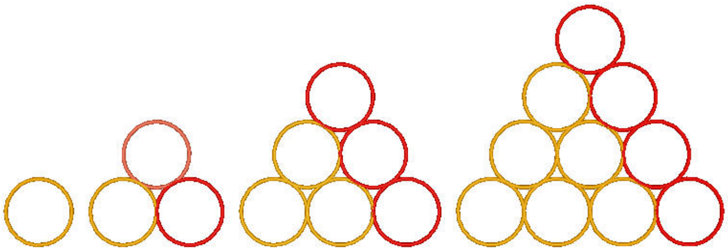






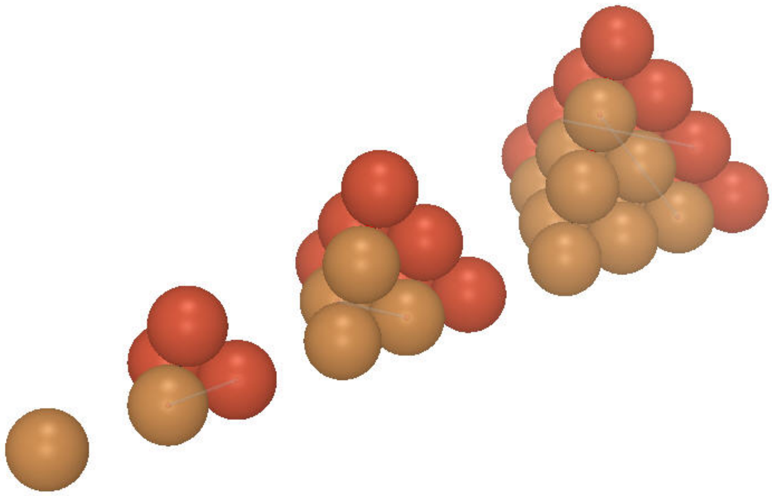


15. Ebene figurierte Zahlenfolgen (Beispiel)



...

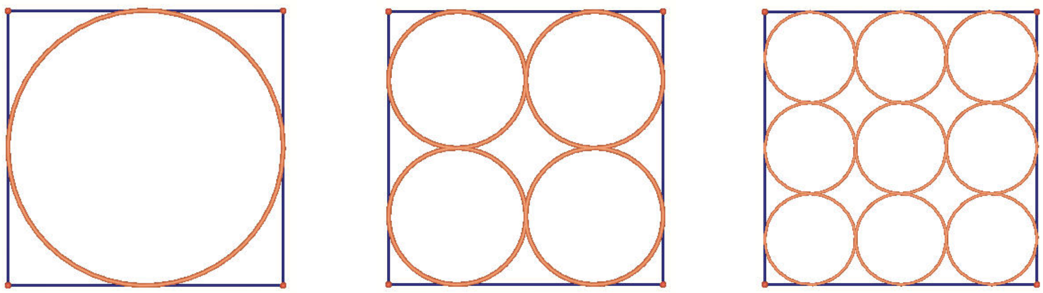
Dreieckszahlen



...

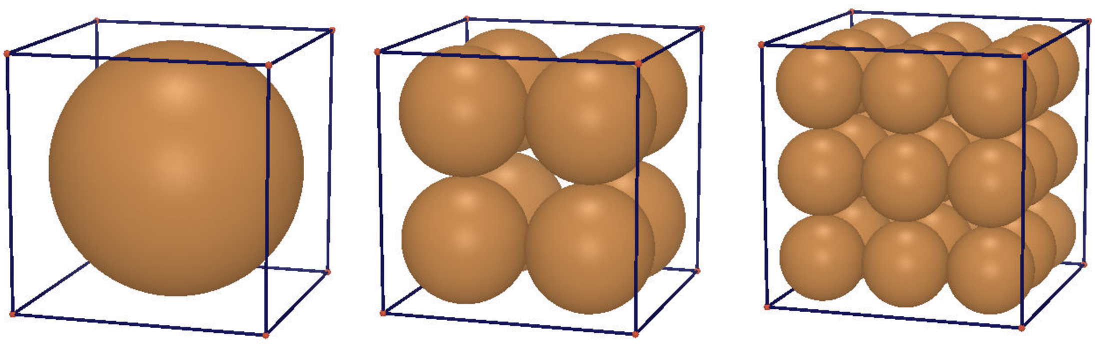
3D-Analogon: Tetraederzahlen

16. Inhaltsgleiche Kreiskonfigurationen



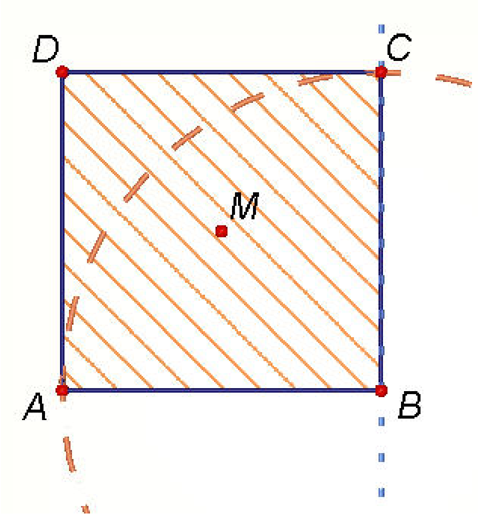
...

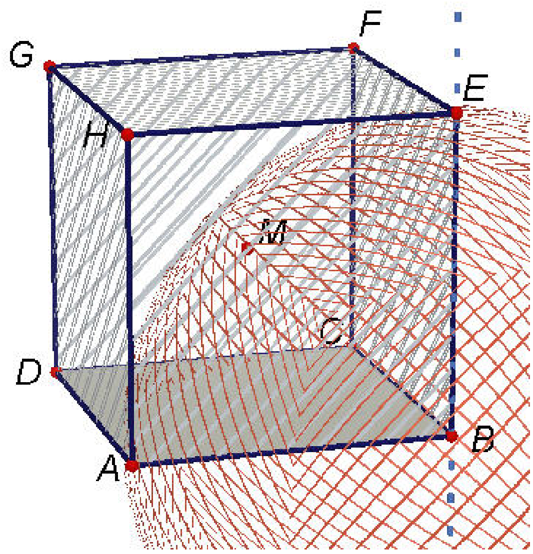
3D-Analogon: Volumengleiche Kugelkonfigurationen



...

17. Analogisierung einer Quadratkonstruktion





	Quadratkonstruktion		**Würfelkonstruktion**
1.	Quadratseite AB	—	Würfelseitenfläche ABCD
2.	Lot auf AB in B	—	Lot auf ABCD in B
3.	Kreis um B mit Radius AB	—	Kugel um B mit Radius AB
4.	Schnittpunkt Lot mit Kreis: C	—	Schnittpunkt Lot mit Kugel: E
5.	Mittelpunkt von B und C: M	—	Mittelpunkt von D und E: M
6.	Punktspiegelung von Seite AB an M: Seite CD	—	Punktspiegelung von Seitenfläche ABCD an M: Seitenfläche EFGH
7.	Verbindung von Seite AB mit Seite CD zum Quadrat ABCD als Objekt.	—	Verbindung von Seitenfläche ABCD mit Seitenfläche EFGH zum Würfel ABCDEFGH als Objekt.