

Zentral- und parallelprojektive Darstellungen in Cabri 3D

1. Einleitung

Cabri 3D repräsentiert nicht nur geometrisches Wissen über raumgeometrische Objekte und ihre Generierung, sondern auch über ihre Darstellungen in der Systematik der darstellenden Geometrie. Im folgenden beschreiben wir die einzelnen Darstellungsoptionen in Abbildung 1 näher und geben jeweils eine einführende phänomenologische Erklärung mit im virtuellen Raum des Cabri 3D konstruierten zentral- bzw. parallelprojektiven Bildobjekten. Wir verwenden also Cabri 3D, um seine Darstellungsoptionen verstehen zu lernen. Die betreffenden Abbildungsverfahren wenden wir dabei immer auf ein und denselben Körper, einem Würfel mit aufgesetztem halben Würfel, an (Abb. 2). Die Ansichten in Cabri 3D sind untereinander voll kompatibel: bei verschiedenen geöffneten Ansichten bewirkt jede konstruktive oder manipulative Änderung in einer von ihnen eine simultane Änderung in den anderen.

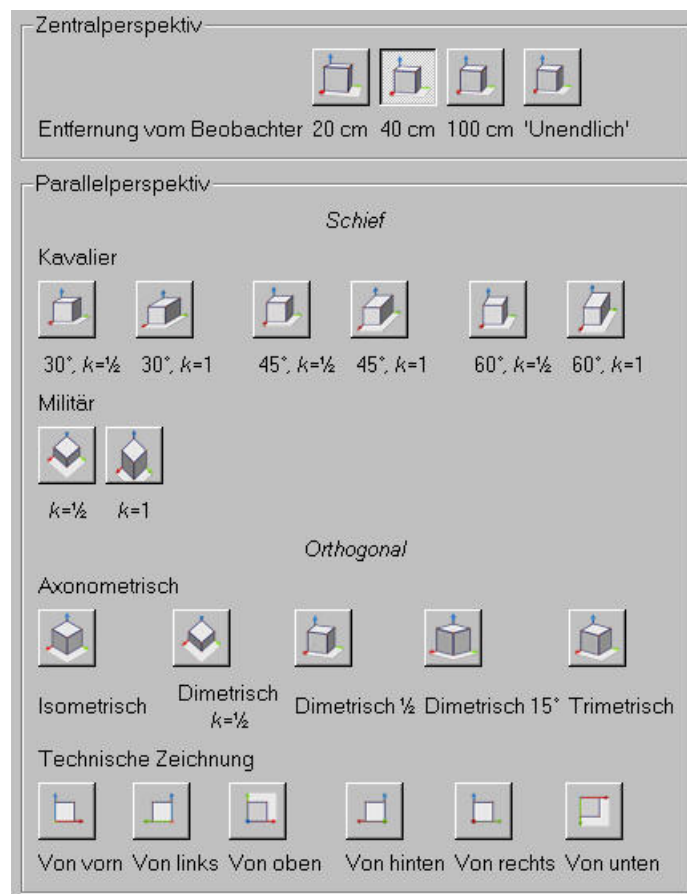


Abb. 1 Ansichten-Menü in Cabri 3D

Neben den Bezeichnungen „zentralprojektiv“ bzw. „parallelprojektiv“ sind auch die Bezeichnungen „zentralperspektiv“ bzw. „parallelperspektiv“ üblich. Wir benutzen beide Bezeichnungsweisen.

2. Besondere zentralprojektive (zentralperspektive) Darstellungen

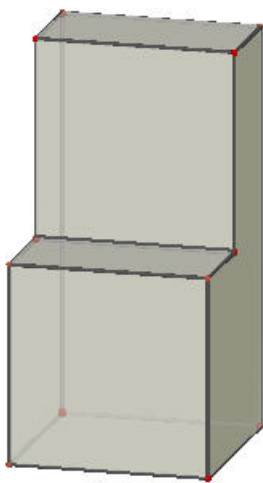


Abb. 2 Musterkörper

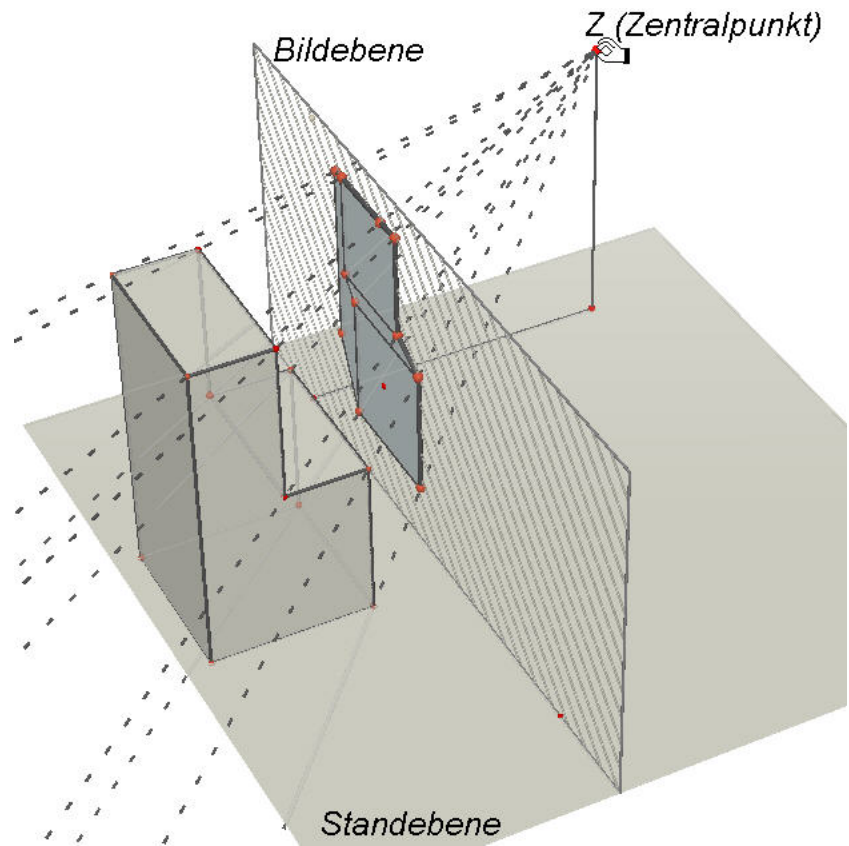


Abb. 3 Konstruktion des zentralprojektiven Körperbildes

In Abb. 3 ist zu sehen, wie von einem Zentralpunkt oder Augpunkt Z die Sehstrahlen zu den Eckpunkten unseres Körpers, der auf einer Standebene mit zur Bildebene parallelen Seitenflächen steht, gezogen sind. Die Sehstrahlen durchstoßen die Bildebene in den Bildeckpunkten des planaren zentralperspektiven Körperbildes. Von der Seite des Zentralpunktes aus sieht die räumliche Szene wie in Abbildung 4 aus. Verlängert man die Bildkanten der Körperkanten, die senkrecht auf der Bildebene stehen, so schneiden diese einander in einem sogenannten Fluchtpunkt (H), der Fußpunkt des Lotes von Z auf die Bildebene ist. Vergrößert man den Abstand bzw. die Distanz des Zentralpunktes zur Bildebene durch entsprechendes Verziehen, so erscheinen die Bildkanten immer weniger verzerrt (Abb. 5). Verzieht man Z immer weiter (Abb. 6), so wird das Körperbild schwach perspektiv (Abb. 7). – Ausführlicher wird die Zentralprojektion im virtuellen Raum in: „Zentralprojektion im virtuellen Raum – eine Einführung“ (Schumann 2005b) behandelt.

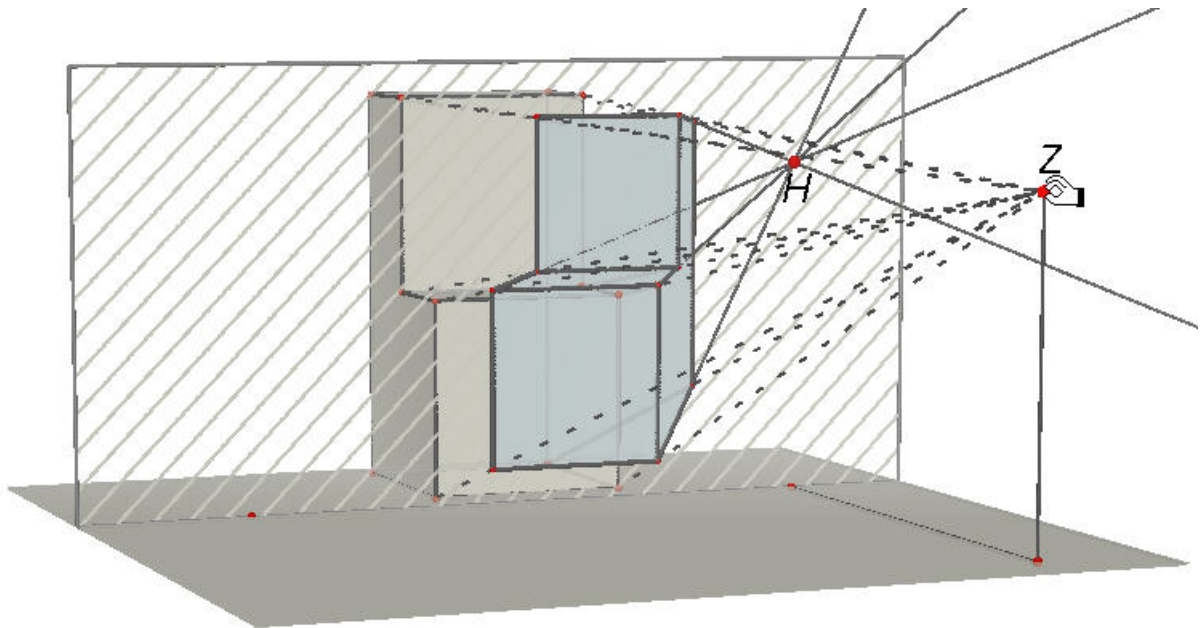


Abb. 4 „Stark“ zentralprojektives Körperbild mit Fluchtpunkt

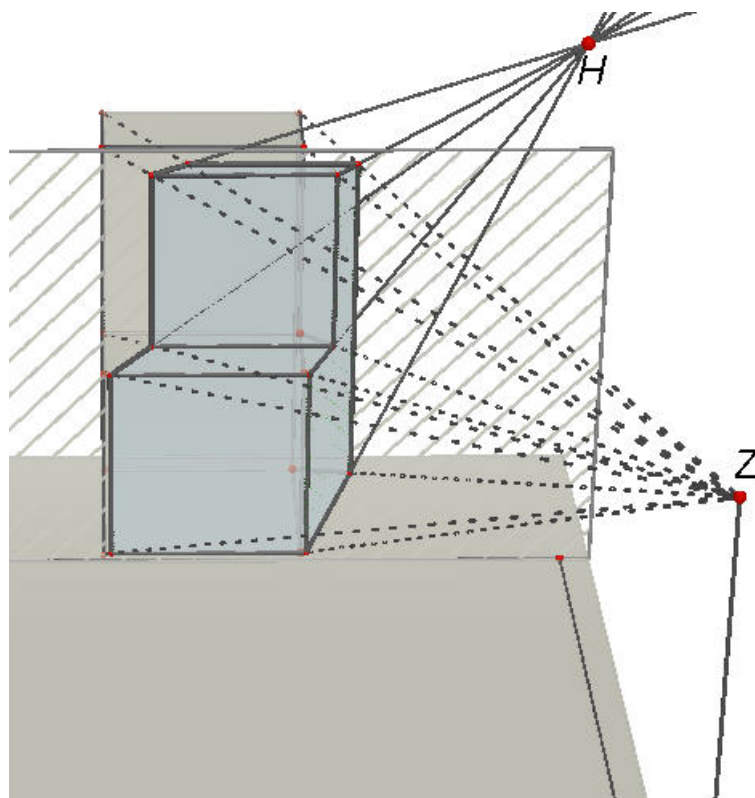


Abb. 5 Variation der Lage des Zentralpunktes

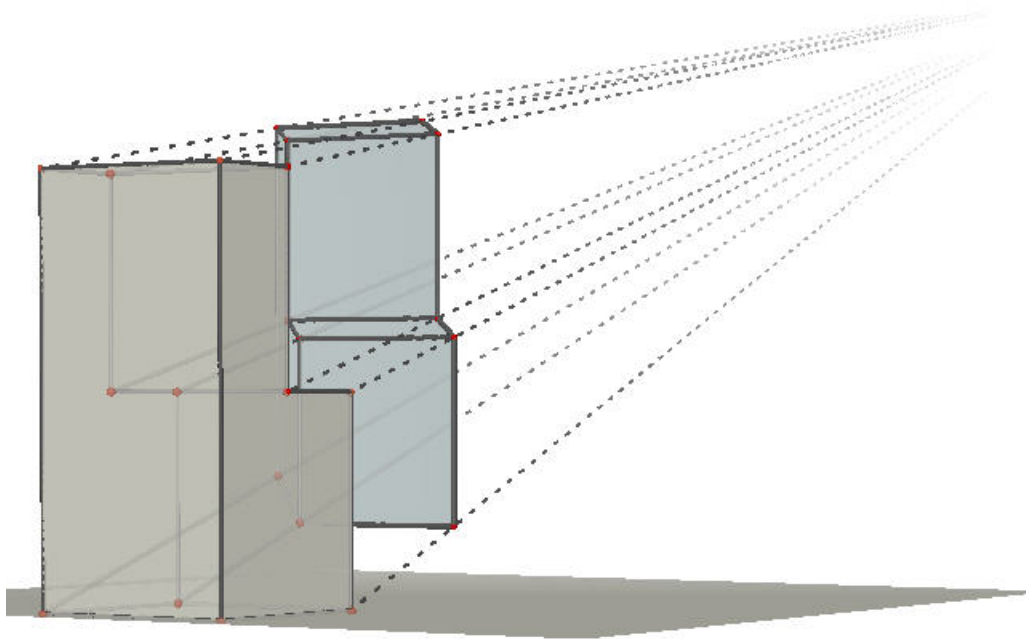


Abb. 6 Distanzvergrößerung

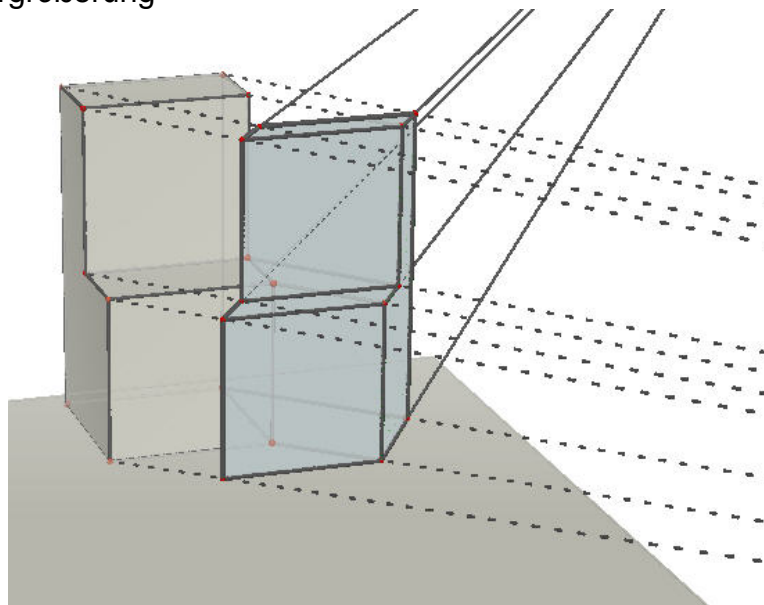


Abb. 7 „Schwach“ zentralperspektives Körperbild

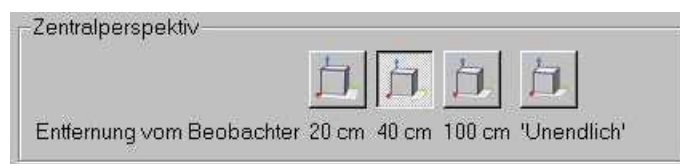


Abb. 8 Zentralperspektive Ansichten (Optionen in Cabri 3D)

Die Abb. 8 zeigt die Optionen für die zentralperspektive Darstellung (die Voreinstellung erkennt man am aktivierten Knopf). Das Cabri 3D-interne dreidimensionale Koordinatenmodell eines Würfels der Kantenlänge 12cm, in dem im wesentlichen die abzubildenden

Objekte konstruiert werden, wird zentralperspektiv auf die Bildebene abgebildet. Die cm-Angaben beziehen sich auf den Abstand (die Distanz) des Augpunkts bzw. Zentralpunkts von der Bildebene, die durch den Mittelpunkt dieses Würfels geht. Je größer der Abstand des Zentralpunkts von dieser Bildebene, desto weniger verzerrt erscheinen die Bilder der senkrecht zur Bildebene stehenden Kanten des Körpers. Die Abb. 9 zeigt eine stark zentralperspektive Ansicht. Das erkennt man daran, dass die nachträglich eingezeichneten Linien einander in einem „nah“ gelegenen Fluchtpunkt schneiden. In Abbildung 10 ist die voreingestellte Ansicht zu sehen, in der sich diese Linien in einem weiter entfernten Fluchtpunkt schneiden, während in Abbildung 11 diese Linien schon fast parallel verlaufen. Wenn der Augpunkt ins „Unendliche“ wandert, so werden die Tiefenkanten parallel. Die Zentralprojektion geht dann in eine Parallelprojektion über, und wie erhalten ein Körperbild, wie es in Abbildung 2 dargestellt ist.

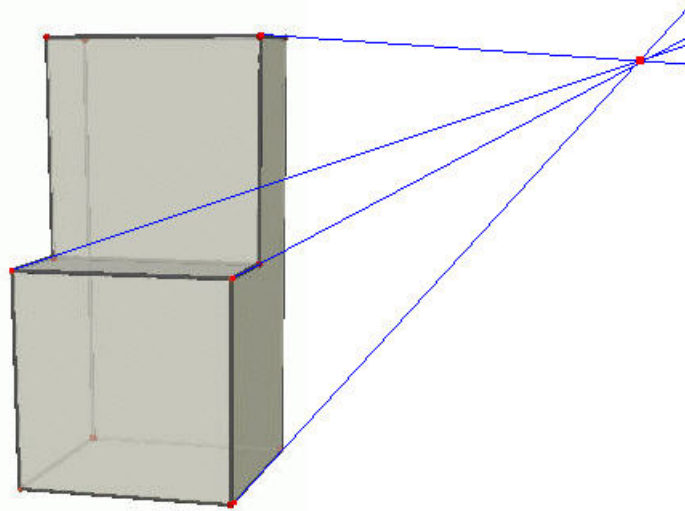


Abb. 9 „Stark“ zentralperspektive Körperansicht (20cm)

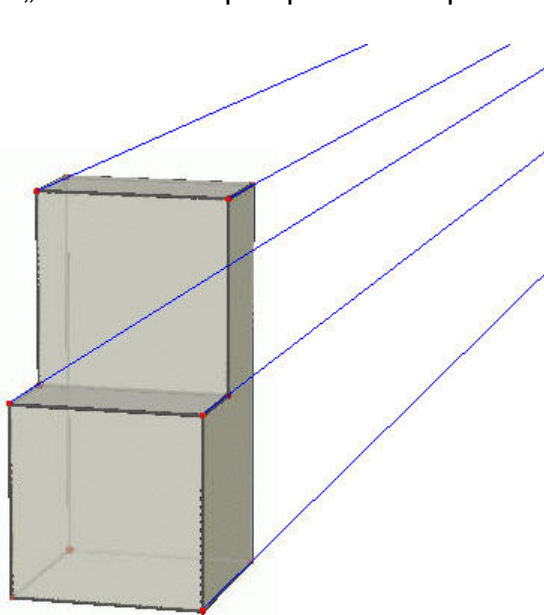


Abb. 10 „Natürlich“ zentralperspektive Körperansicht (40 cm)

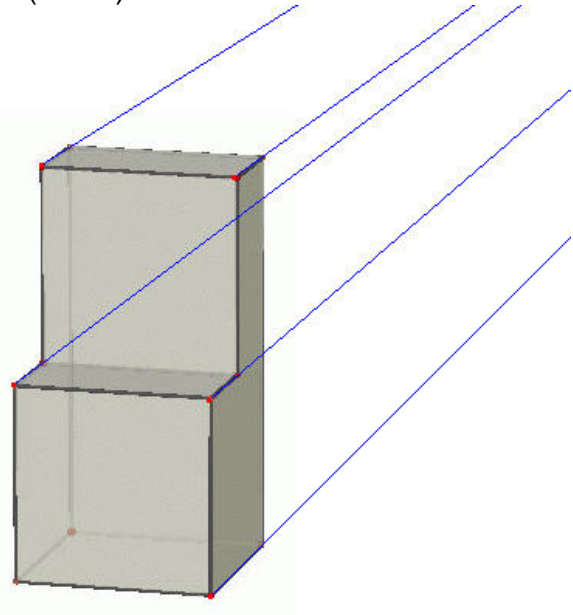


Abb. 11 „Schwach“ zentralperspektive Körperansicht (100 cm)

3. Parallelprojektive (parallelperspektive) Darstellungen

Projizieren wir das Kantenmodell unseres Körpers auf eine Ebene, ähnlich wie es das Sonnenlicht macht, so erhalten wir ein Bild, wie in Abbildung 12 (der Kantenkörper ist von links unten projiziert). Es handelt sich um eine sogenannte schiefe bzw. schräge Parallelprojektion. Der Pfeil AB gibt dabei die Projektionsrichtung und den Projektionswinkel, gemessen gegen das Lot von A auf die Bildebene, an. Die Neigung der Projektionsstrahlen gegen die Bildebene ist gegeben durch 90° minus dem Projektionswinkel. Durch Verziehen von A bzw. B können Richtung und Winkel variiert werden. Bei der Parallelprojektion werden parallele Kanten auf parallele Kanten abgebildet. Kanten, die parallel zur Bildebene liegen haben gleichlange parallele Bilder. Die Längenproportionen bleiben erhalten, aber die Maße der Winkel im allgemeinen nicht. Die Abbildung 13 zeigt eine Variation der parallelprojektiven Abbildung des Kantenkörpers; er ist jetzt von links oben projiziert. Variiert man das Bild des Flächenmodells (Abb. 14, Flächenkörper von rechts unten projiziert), so sind mehrere Fälle der Sichtbarkeit von Ecken und damit von Kanten und Flächen zu beachten, was bei der Konstruktion des Körperbilds ausschlaggebend ist. Die Abbildung 15 zeigt einen weiteren Fall, wenn die Projektion von links oben erfolgt. – Eine parallelprojektive Modellierung von Körperschatten wird behandelt in: „Parallelprojektive Schattenbilder von Körpern mit Cabri 3D“ (Schumann 2005a).

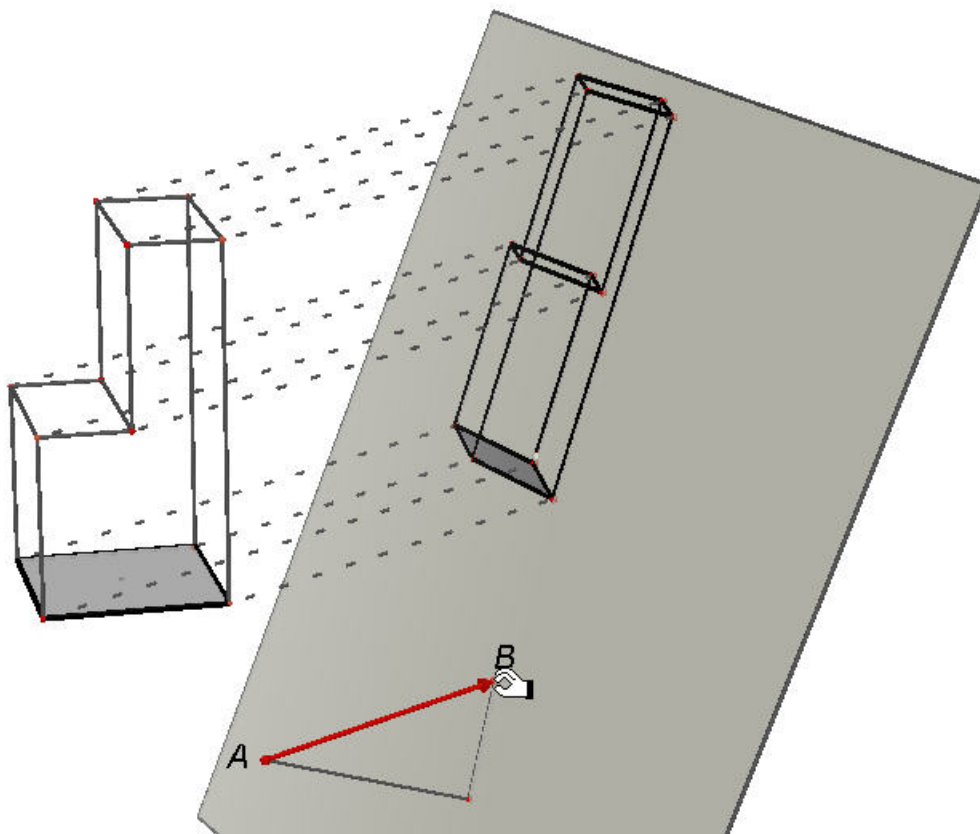


Abb. 12 Parallelprojektives Kantenkörper-Bild

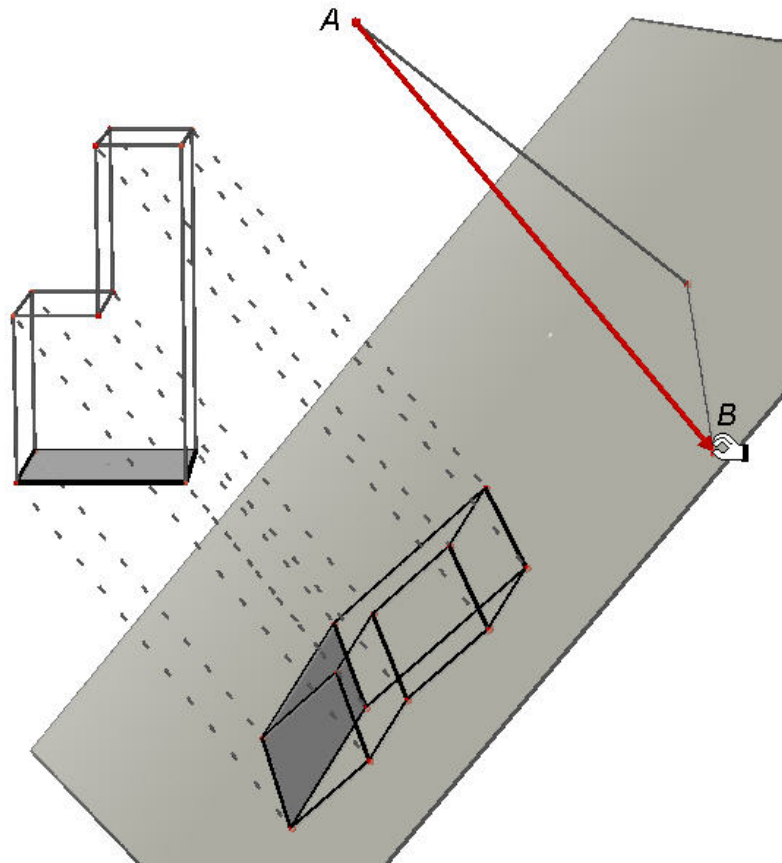


Abb. 13 Parallelprojektives Kantenkörper-Bild (Variation)

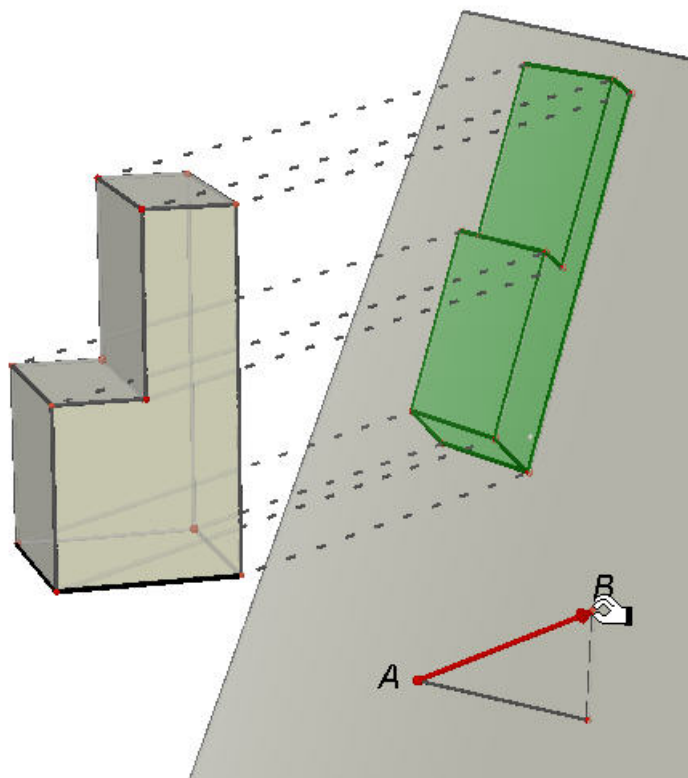


Abb. 14 Parallelprojektives Flächenkörper-Bild

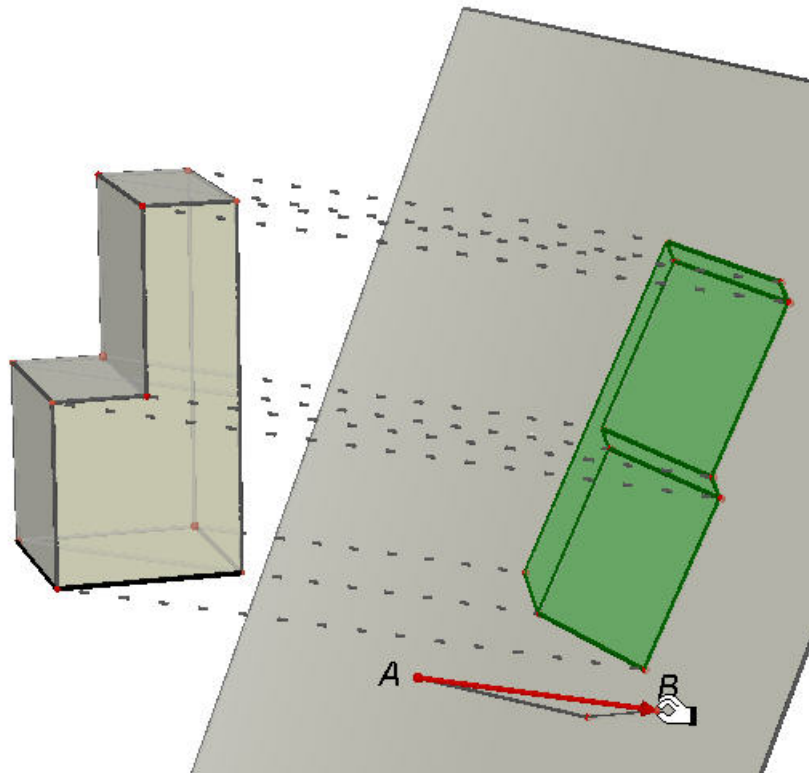


Abb. 15 Parallelprojektives Flächenkörper-Bild (Variation)

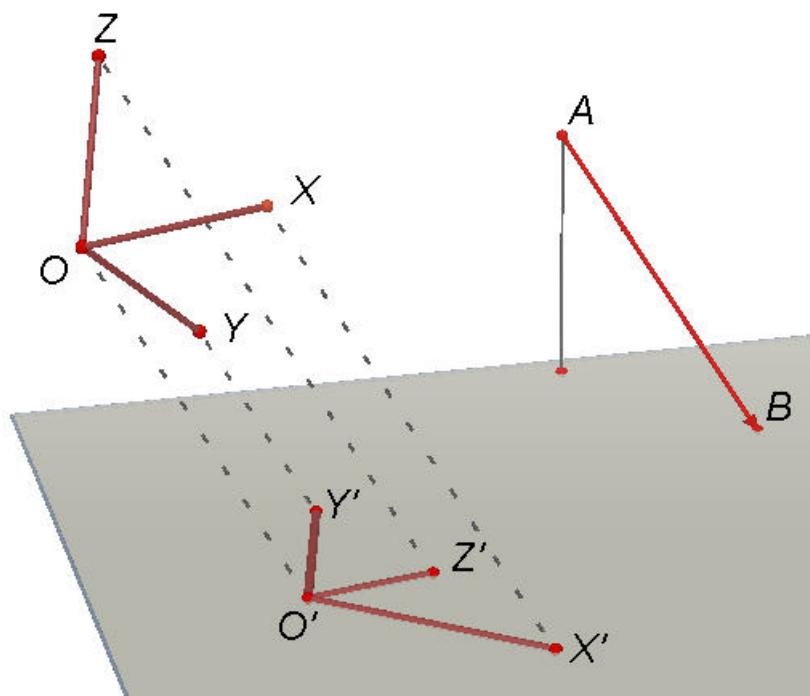


Abb. 16 Satz von Pohlke (Illustration)

Die Parallelprojektion ist sehr variantenreich: zu je drei beliebigen Strecken in der Bildebene, die einen Endpunkt gemein haben (Abb. 16, $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$), lässt sich eine Parallelprojektion angeben, die drei räumliche, gleichlange und paarweise senkrecht aufeinander stehende Strecken mit gemeinsamen Anfangspunkt (Abb. 16, OX , OY , OZ)

auf die vorgegebenen Strecken in der Bildebene abbildet. Das ist die Aussage des Satzes von Pohlke (Karl Wilhelm Pohlke 1810-1876). Dieser Satz liefert u. a. die Begründung dafür, dass bei ebenen Darstellungen räumlicher Objekte, etwa bei Handskizzen, für das parallelprojektive Bild eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems als Bezugssystem die x-y-z-Achsenrichtungen und ihre Maßeinheiten willkürlich gewählt werden können.

3.1 Besondere schiefe Parallelprojektionen (Parallelperspektiven)

Um Anschaulichkeit und leichte planare Konstruierbarkeit der parallelprojektiven Darstellung zu erzielen, ist die Lage des abzubildenden räumlichen Objekts zur Bildebene, die Projektionsrichtung und die Größe des Projektionswinkels zu spezialisieren. Das bewirkt eine entsprechende Festlegung der Strecken $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ in Abbildung 16.

Unter den schiefen bzw. schrägen parallelprojektiven Abbildungen eines Körpers sind die Kavalier- und die Militärprojektionen ausgezeichnet. Bei der nichtgenormten Kavalierprojektion ist eine Seitenfläche parallel zur Bildebene gewählt (Abb. 17). Je nach Projektionsrichtung und -winkel ergeben sich verschiedene Körperbilder in Kavalierprojektion. Die unverzerrte Darstellung des Bildes nehmen wir auf dem Bildschirm wahr, wenn wir die Raumszene so drehen, dass das Lot von A auf die Bildebene als Punkt erscheint bzw. A mit dem Lotfußpunkt zur Deckung gebracht wird bzw. die Bildebene parallel zur Bildschirmenebene zu liegen kommt. So stellt das parallelperspektive Bild unseres Körpers in Abbildung 18 eine Kavalierprojektion von schräg oben rechts dar. Wobei die Tiefenkanten mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ verkürzt werden. In Abbildung 19 ist das kavalierperspektive Bild von oben links dargestellt. Die Tiefenkanten sind hier nicht verkürzt.

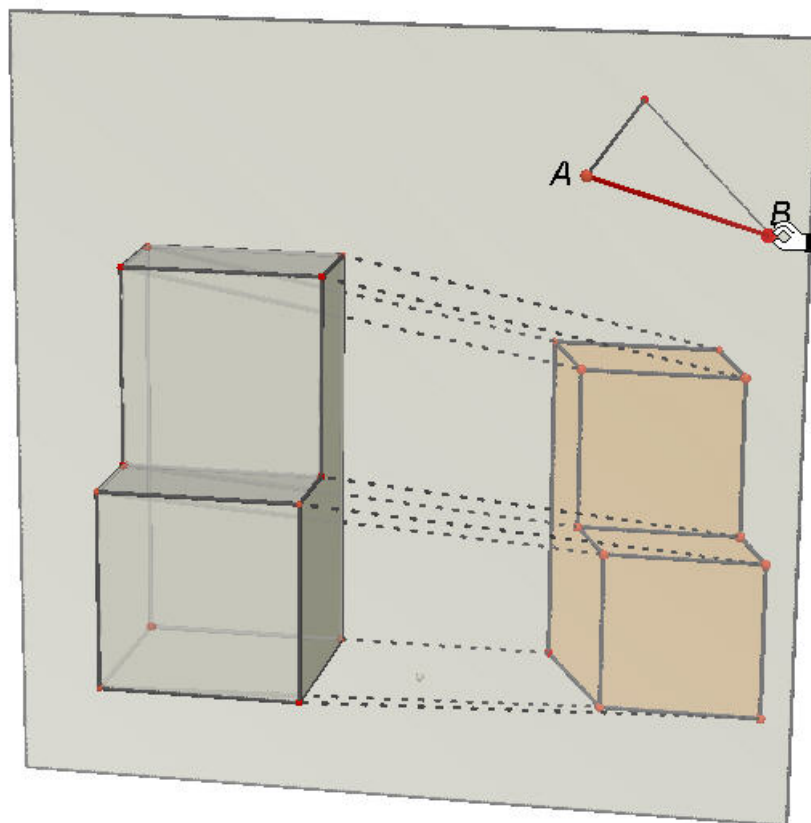


Abb. 17 Kavalierprojektion (allgemein)

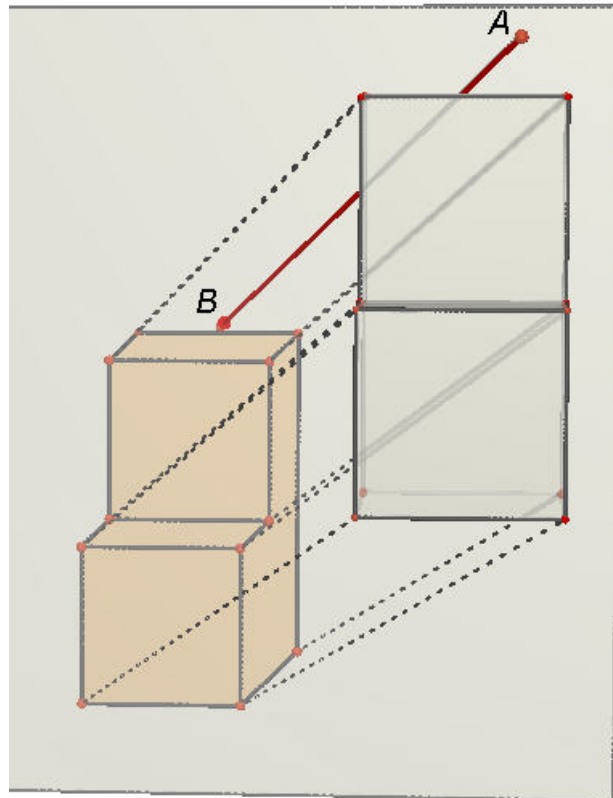


Abb. 18 Kavalierprojektion (45° ; $\frac{1}{2}$; von rechts oben)

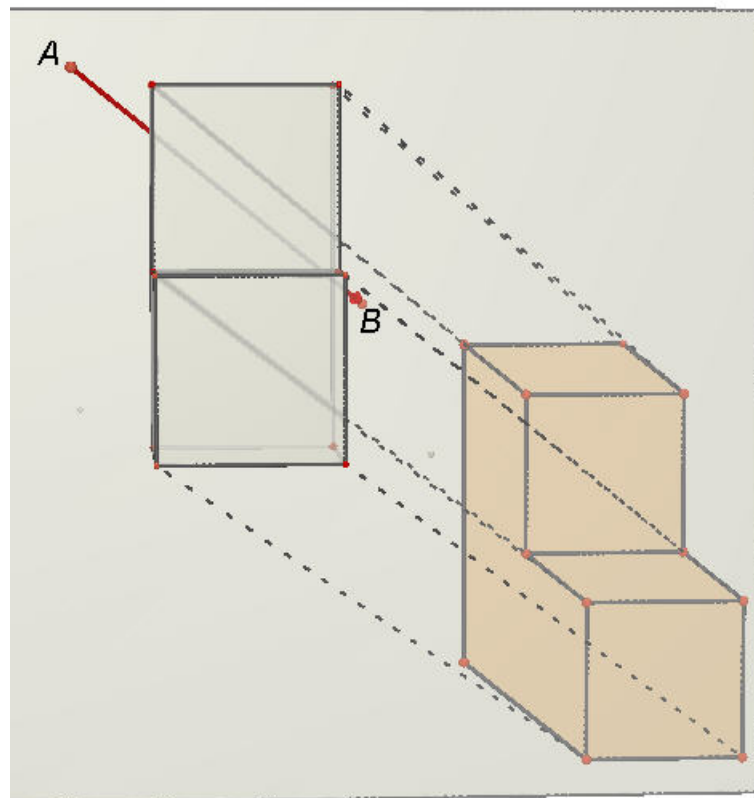


Abb. 19 Kavalierprojektion (45° ; 1; von links oben)

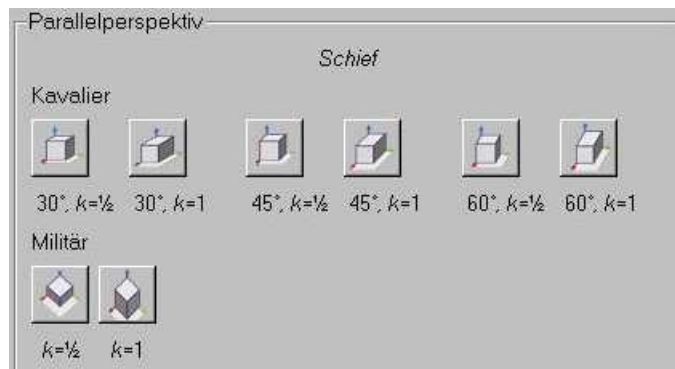


Abb. 20 Schiefe parallelperspektive Ansichten (Optionen in Cabri 3D)

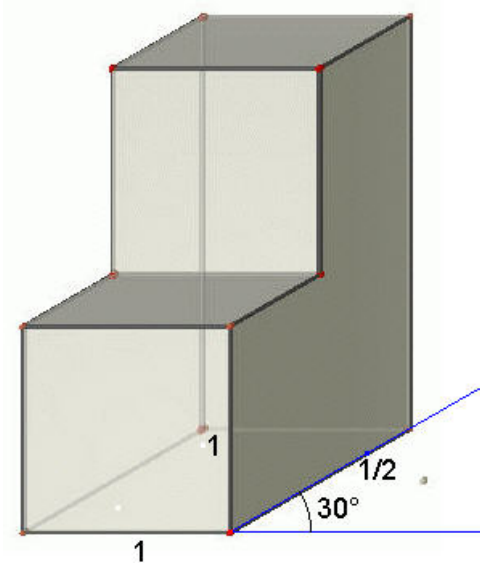


Abb. 21 Kavalierperspektive (30°; 1/2)

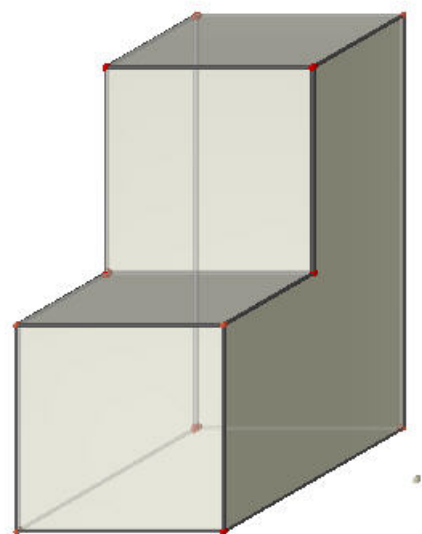


Abb. 22 Kavalierperspektive (45°; 1)

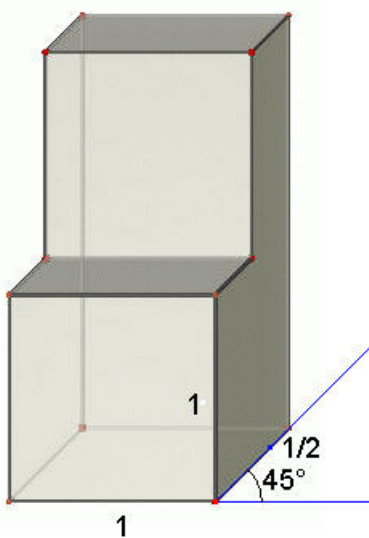


Abb. 23 Kavalierperspektive (45°; 1/2)

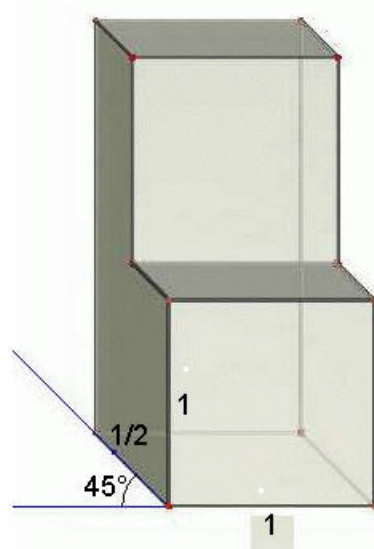


Abb. 24 wie Abb. 23 von links oben

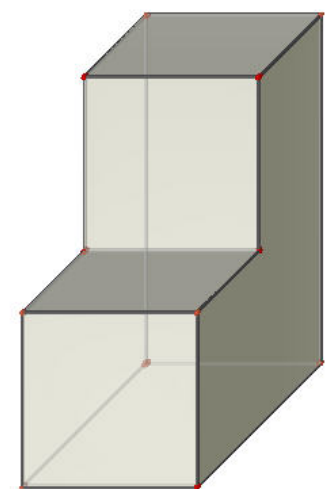


Abb. 25 Kavalierperspektive (45°; 1)

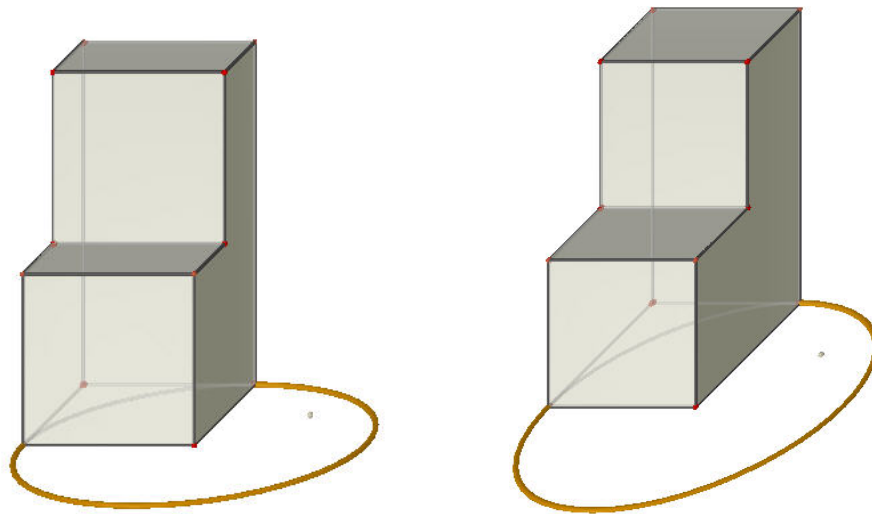


Abb. 26/27 Gleiche Körpermaße – verschiedene kavaliersperspektive Ansichten

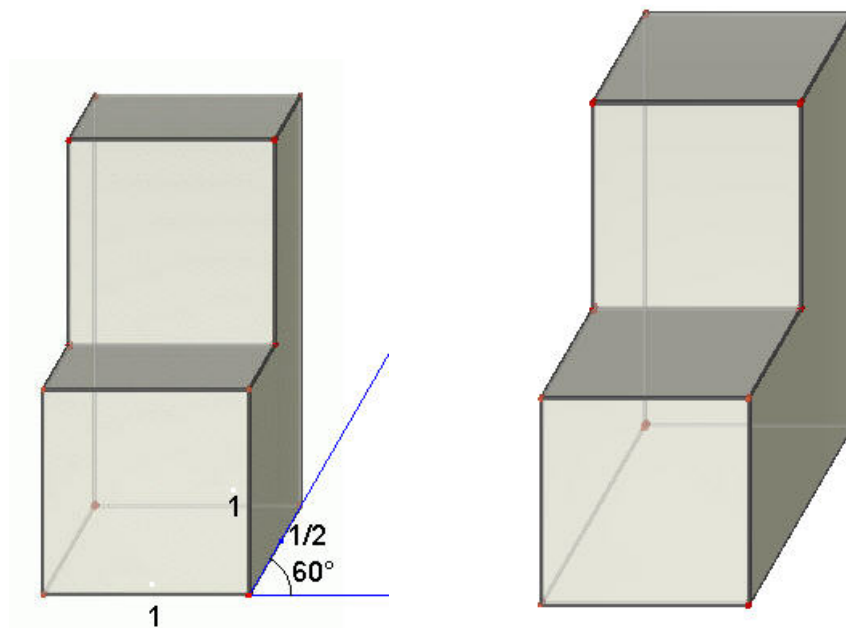


Abb. 28 Kavaliersperspektive (60° ; $\frac{1}{2}$)

Abb. 29 Kavaliersperspektive (60° ; 1)

Die Abbildung 20 zeigt in der ersten Zeile die Knöpfe für die Kavalierprojektionen in Cabri 3D. In den Abbildungen 21/22: die Kavalierprojektion mit einem 30° -Winkel, Abbildung 21 mit der Verkürzung der Tiefenkanten um den Faktor $\frac{1}{2}$ und in Abbildung 22 ohne Verkürzung. In den Abbildungen 23/24: die entsprechenden Kavalierprojektionen für 45° mit dem Verkürzungsfaktor $\frac{1}{2}$ von oben rechts/links. Die Abbildung von oben links kann man durch Spiegelung der Ansicht von oben rechts an einer zur Bildebene passend senkrecht stehenden Ebene erhalten. Die 45° -Kavalierprojektion ohne Verzerrung der Tiefenkanten zeigt die Abbildung 25. Um sich zu überzeugen, dass die Verkürzung nur in der Projektion besteht, kann man im Original einen Kreis mit der Würfelkante als Radius in die Standebene legen, dieser wird als entsprechende Ellipse abgebildet (Abb. 26/27). Die 60° -Kavalierprojektionen zeigen die Abbildungen 28/29. Andere Verzerrungsfaktoren z. B. $\frac{2}{3}$ bei der 30° -Kavalierprojektion und $\frac{1}{3}$ bei der 60° -Kavalierprojektion sind nicht

implementiert. Die 45° -Kavalierprojektion von rechts oben mit dem Verkürzungsfaktor $\frac{1}{2}$ ist eine weit verbreitete Darstellung von Körpern, vor allem in Printmedien für den Unterricht. Die Kavalierprojektion wird wegen ihrer Einfachheit und Anschaulichkeit beim Zeichnen und freihändigen Skizzieren benutzt. Die Flächen, die zur Bildebene bzw. Zeichenebene parallel liegen, zeigen ihre Abmessungen in wahrer Größe.

Eine zweite besondere schiefe Parallelprojektion ist die nicht genormte Militärprojektion. Bei ihr ist die Standfläche des Körpers parallel zur Bildebene und der Projektionswinkel beträgt 45° (Abb. 30). Wählt man zudem eine Projektionsrichtung parallel zur Diagonalebene des würfelförmigen Teilkörpers, so ergibt sich eine Militärprojektion des Körpers mit Bildkanten, die gleiche Länge wie ihre Originale haben (Abb. 31). Die Knöpfe für die entsprechenden Militärprojektionen in Cabri 3D befinden sich in der zweiten Zeile von Abbildung 20. Der erste Knopf erzeugt ein militärprojektives Bild bei dem die vertikalen Kanten mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ verkürzt werden (Abb. 32), der zweite Knopf ein militärprojektives Bild ohne verkürzte bzw. verlängerte Bildkanten (Abb. 33). Diese Militärprojektion ist nicht so anschaulich wie die Kavalierprojektion. Sie hat aber den Vorteil, dass in ihr der Grundriss eines Objekts in wahrer Größe abgebildet ist und außerdem alle Höhen in wahrer Größe entnommen werden können.

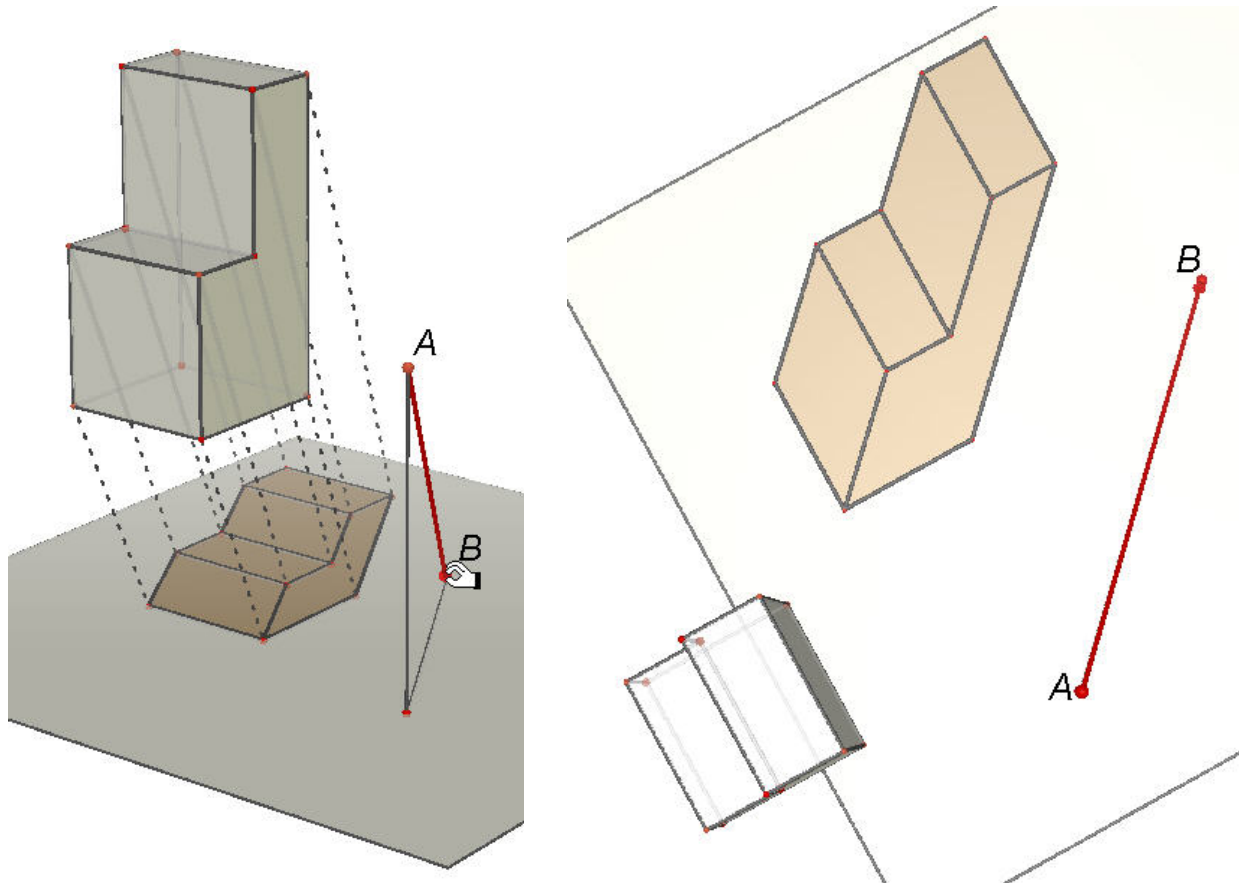


Abb. 30 Militärprojektion (allgemein)

Abb. 31 Militärprojektion (längenmaßtreu)

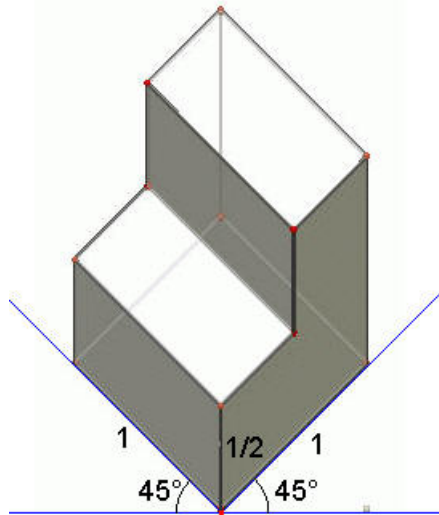
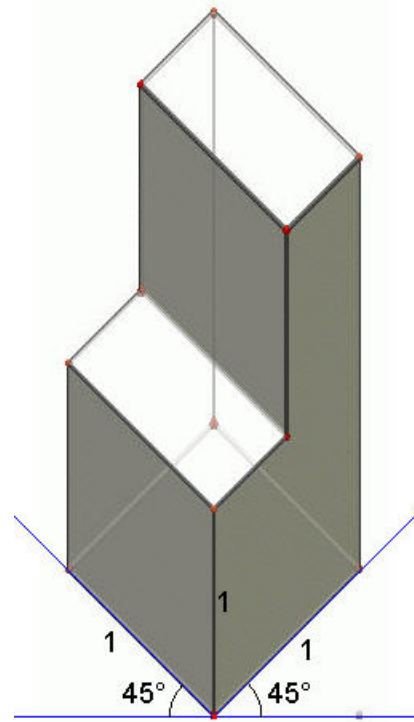


Abb. 32 Militärperspektive mit Höhenverkürzung

Abb. 33 Militärperspektive mit
maßgleichen Bildkanten

3.2 Besondere senkrechte Parallelprojektionen (Parallelperspektiven)

Räumliche Konfigurationen kann man auch senkrecht auf eine Bildebene projizieren. Es ist zu unterscheiden zwischen orthogonalen Projektionen auf Ebenen, die parallel zu Körperflächen liegen (vgl. Abschnitt 3.3) und solchen, bei denen das nicht der Fall ist, wie im folgenden Fall. Unser Körper wird in eine räumliche Ecke bzw. in den ersten Oktanten eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems so eingebettet, wie in Abbildung 34. Das Lot von O auf die Ebene $S_x S_y S_z$ ist Höhe im Tetraeder $OS_x S_y S_z$; der Lotfußpunkt O' ist Höhenschnittpunkt im Dreieck $S_x S_y S_z$.

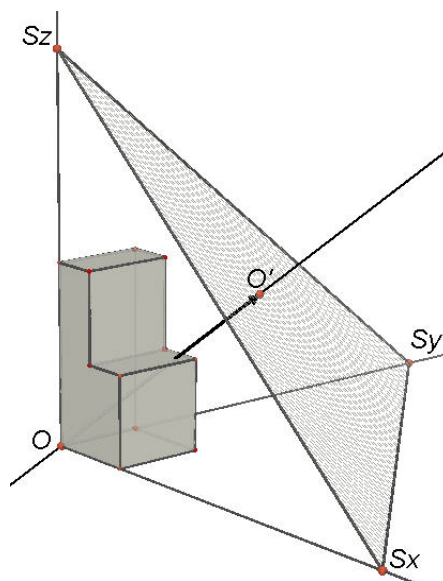


Abb. 34 Senkrechte Axonometrie (Abbildungsvorrichtung von der Seite)

Projiziert man unseren Körper senkrecht auf die Bildebene $S_xS_yS_z$, so entsteht ein senkrecht-axonometrisches (normalaxonometrisches) Bild des Körpers (Abb. 34/35). Die Bildkanten stehen auf den entsprechenden Geraden S_xS_y , S_yS_z , S_xS_z stets senkrecht.

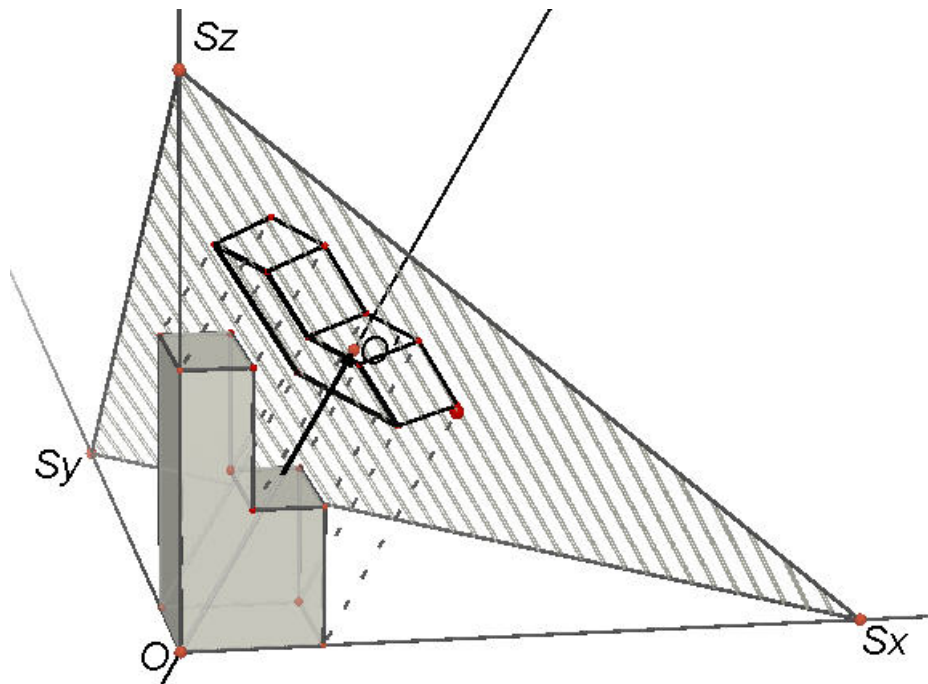


Abb. 35 Senkrecht-axonometrisches Körperbild von „hinten“ gesehen

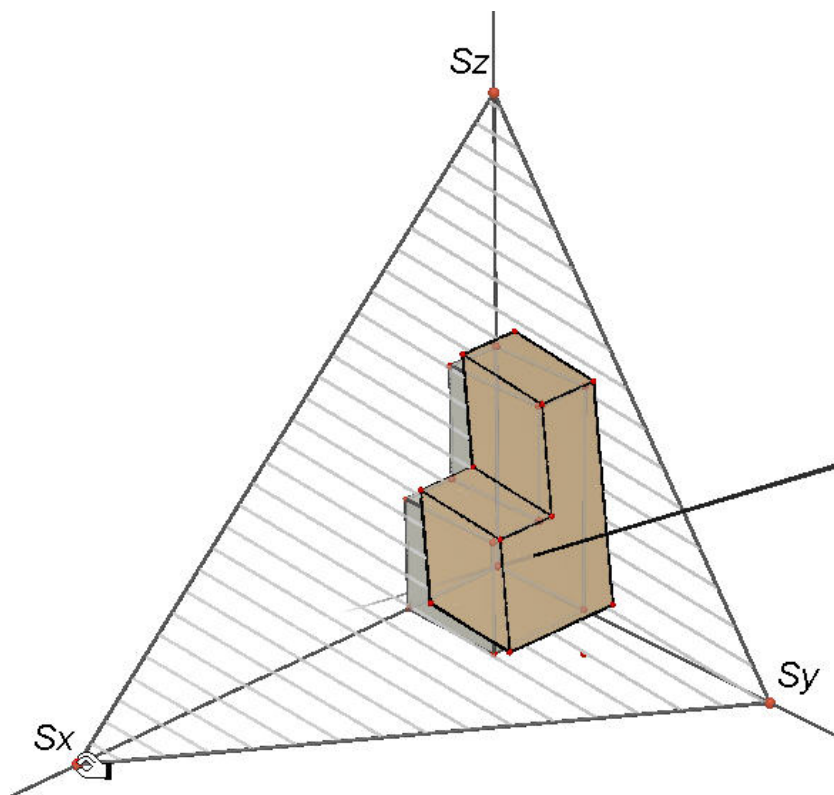


Abb. 36 Senkrecht-axonometrisches Körperbild von vorn gesehen

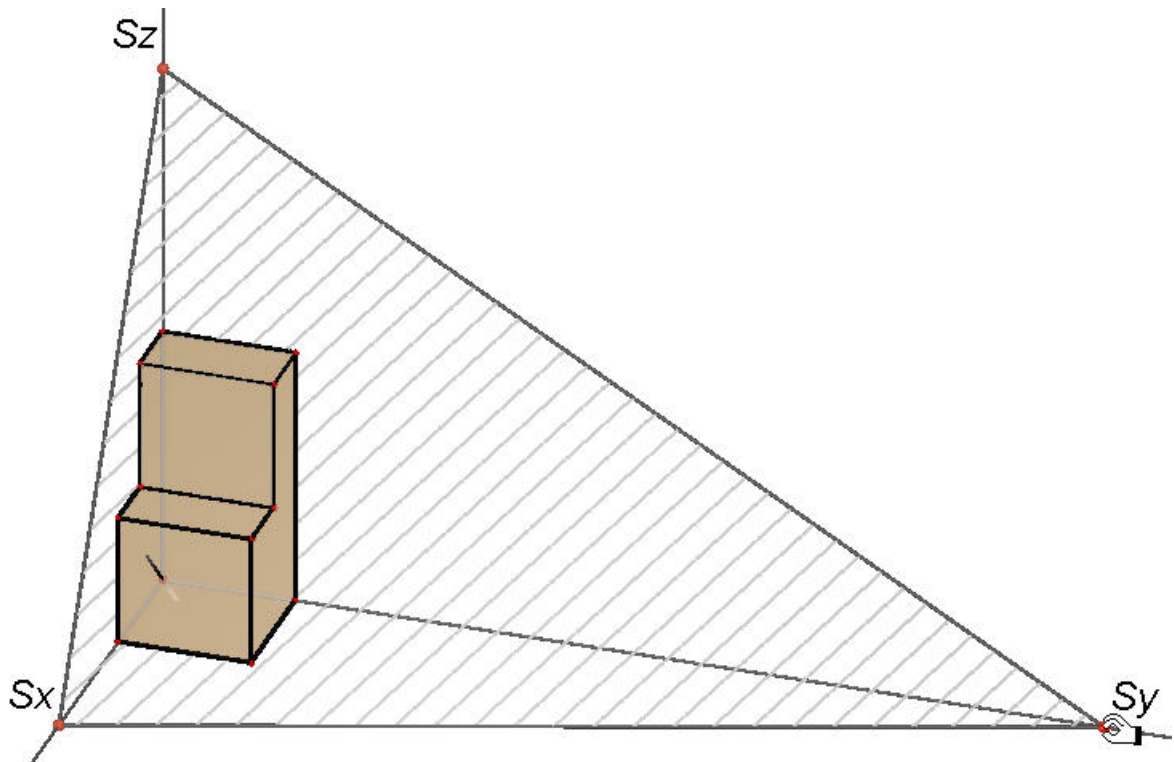


Abb. 37 Senkrecht-axonometrisches Körperbild (Variation)

Durch Verziehen der Punkte S_x , S_y , S_z erhält man variantenreiche orthogonal axonometrische Bilder des Körpers (Abb. 34, ein Beispiel). Das Verhältnis der Streckenlängen $OS_x : OS_y : OS_z$ ist also ausschlaggebend für die Kanten- und Winkelverzerrung im Bild.

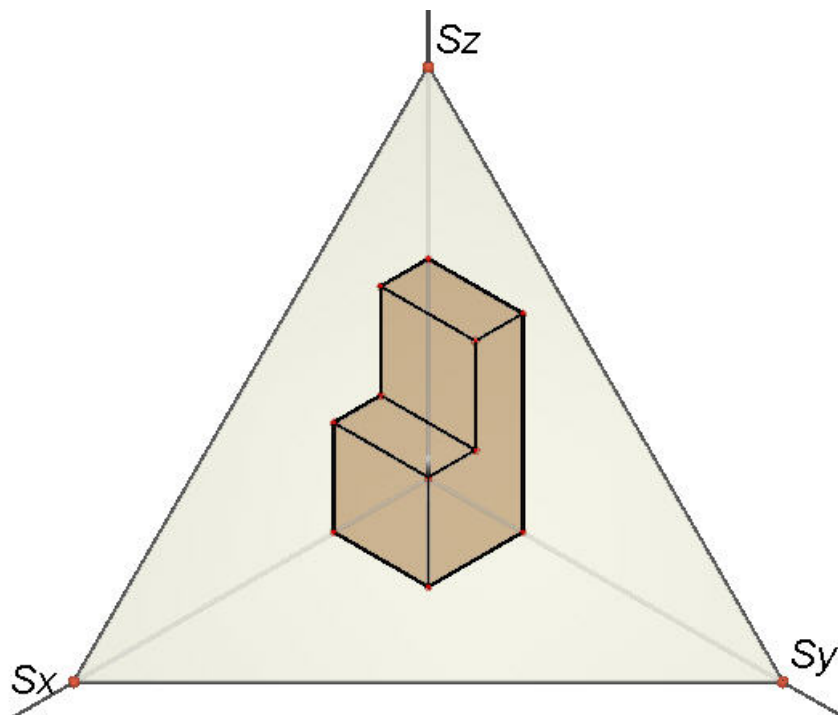


Abb. 38 Isometrisches Körperbild (1:1:1)

Wählt man das Verhältnis $OS_x : OS_y : OS_z = 1:1:1$, d. h. bildet $S_x S_y S_z$ ein gleichseitiges Dreieck, so erhält man ein isometrisches Bild unseres Körpers, bei dem alle Kanten in dem gleichen Längenverhältnissen stehen, wie im Originalkörper (Abb. 38). Die Bilder der Grundkanten des Körpers bilden 30° -Winkel mit der Schnittgeraden $S_x S_y$ der x - y -Ebene mit der Bildebene; im rechten Winkel stehende Kanten haben dementsprechend Bildkanten, die einen 120° -Winkel einschließen.

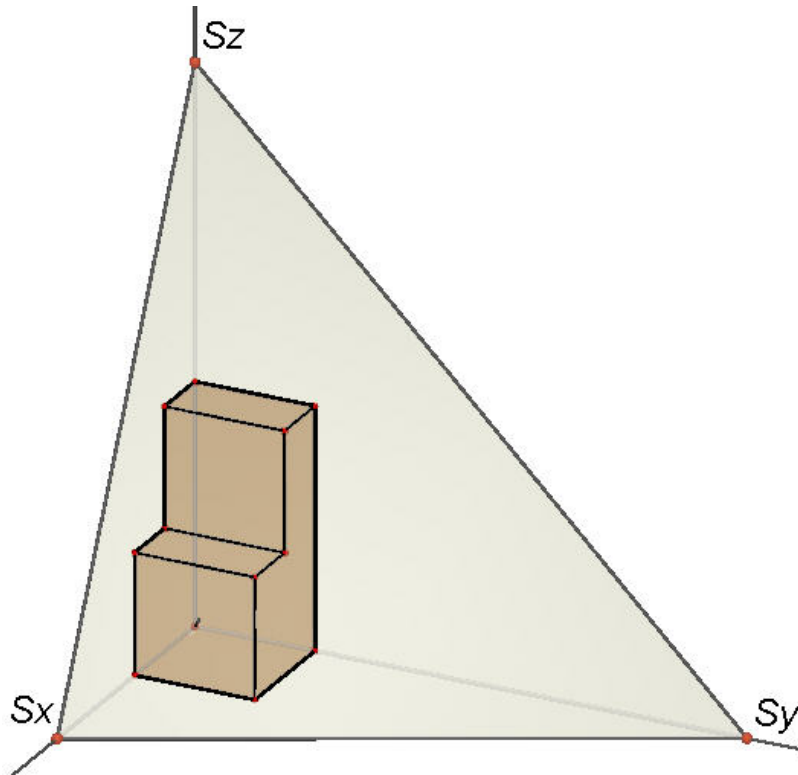


Abb. 39 Ingenieurperspektives Körperbild (1:2:2)

In Abbildung 39 ist das Verhältnis $OS_x : OS_y : OS_z = 1:2:2$ gewählt. Diese Art der Abbildung wird mit Ingenieur-Axonometrie bezeichnet. $S_x S_y S_z$ bilden ein besonderes gleichschenkliges Dreieck.

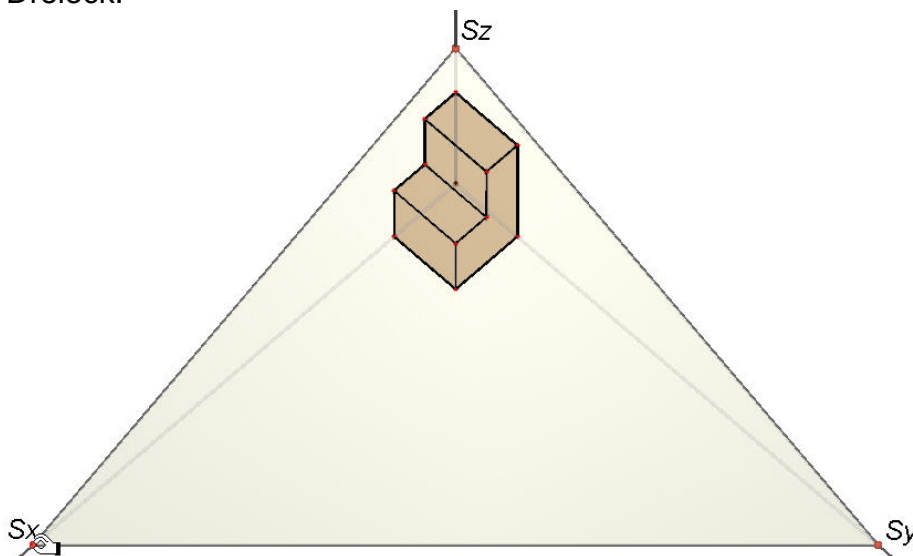


Abb. 40 Senkrecht-axonometrisches Körperbild (1:1: z, z<1)

Andere regelhafte senkrecht-axonometrische Projektionen erhält man für $OS_x : OS_y : OS_z = 1:1:z$ mit $z < 1$ in Abbildung 40 und mit $z > 1$ in Abbildung 41. $S_x S_y S_z$ bilden jeweils gleichschenklige Dreiecke.

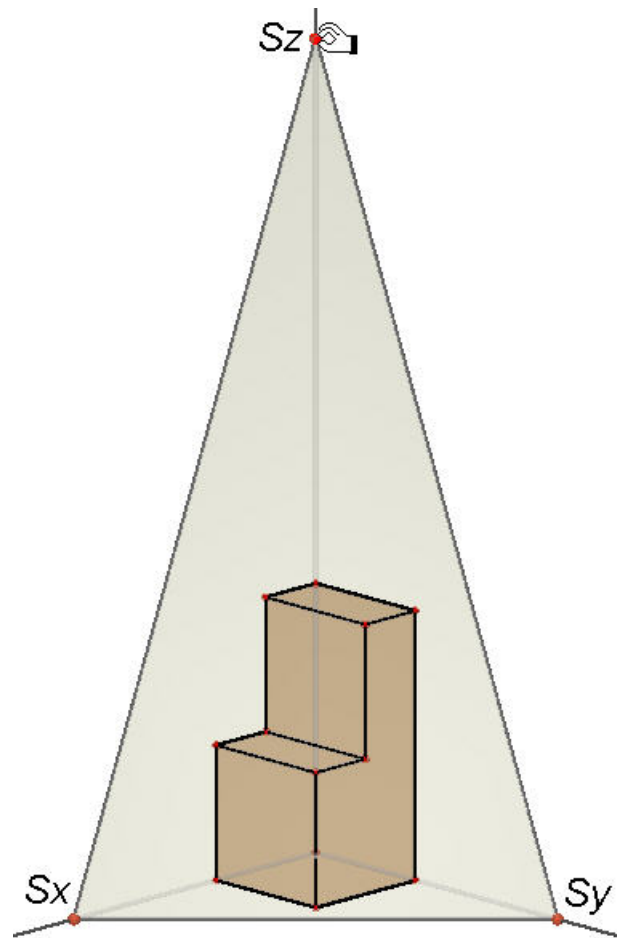


Abb. 41 Senkrecht-axonometrisches Körperbild ($1:1:z$, $z > 1$)



Abb. 42 Orthogonal-axonometrische Ansichten (Optionen in Cabri 3D)

Die Abbildung 42 zeigt die entsprechenden Button für die senkrecht-axonometrischen Ansichten raumgeometrischer Konfigurationen. Die nach DIN 5 genormte isometrische Darstellung (Abb. 43) zeigt alle Kanten in wahren Längenverhältnissen. Sie lässt sich leicht zeichnen. Wegen ihrer Symmetrie ist diese Darstellung bei entsprechend symmetrischen Körpern nicht geeignet. Bei der dimetrischen Darstellung in Abbildung 44 sind die vertikalen Kanten verkürzt mit dem Faktor $\frac{1}{2}$; bei der dimetrischen Darstellung in Abbildung 45 sind die Tiefenkanten um den Faktor $\frac{1}{2}$ verkürzt und die Winkel gegen die Horizontale betragen 7° bzw. 42° . Die Raumwirkung dieser dimetrischen Projektion nach DIN 5 ist recht gut; beim ökonomischen manuellen Zeichnen bedarf es aber einer

entsprechenden Winkelschablone . Bei der dimetrischen Darstellung in Abbildung 46 sind die Kantenlängenverhältnisse wie im Original; bis auf den Verzerrungswinkel stimmt diese Darstellung mit der isometrischen überein. In Abbildung 47 liegt eine dimetrische Darstellung vor, bei der die Winkel gegen die Horizontale 30° bzw. 15° betragen.

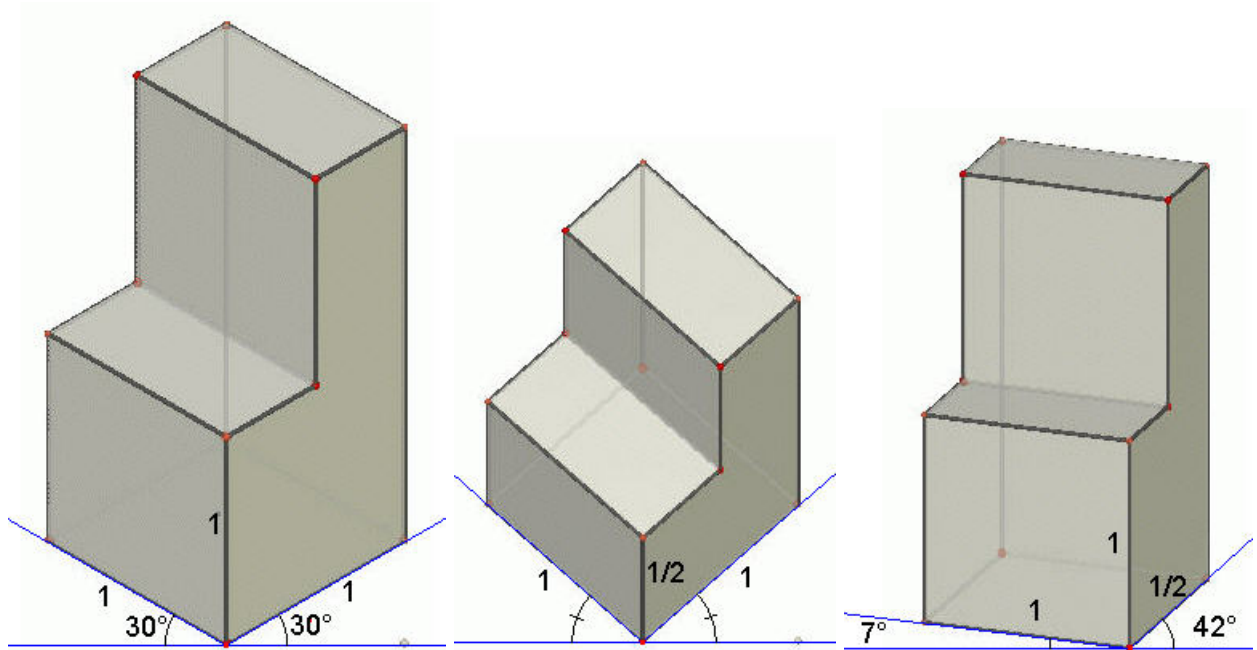


Abb. 43 Isometrische Ansicht Abb. 44 Dimetrische Ansicht ($z=1/2$) Abb. 45 Dimetrische Ansicht $\frac{1}{2}$ (DIN 5)

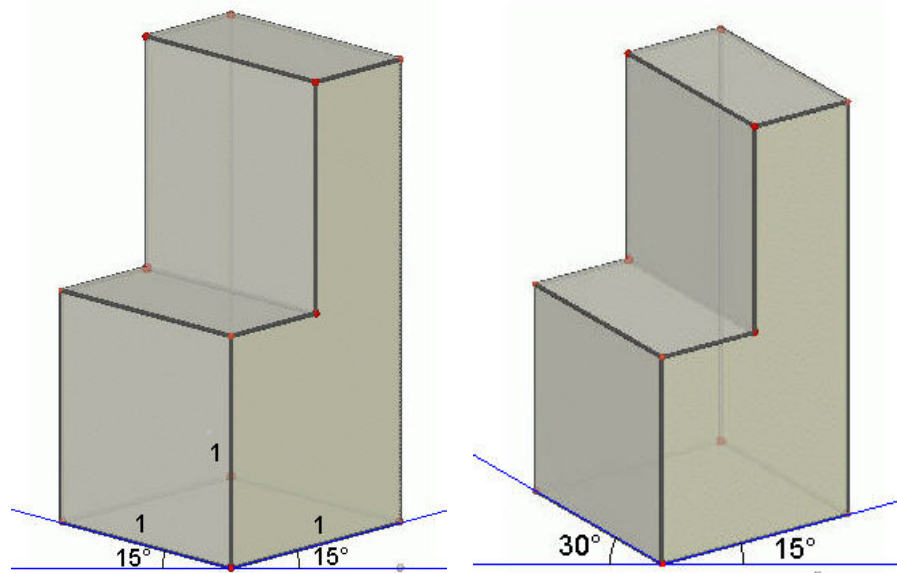


Abb. 46 Dimetrische Ansicht 15° (1:1:1)

Abb. 47 Trimetrische Ansicht

3.3 Orthogonale Tafelbilder

Man legt den Körper in eine räumliche Ecke so, dass seine Seitenflächen parallel zu den jeweiligen Flächen (Tafeln) der räumlichen Ecke sind (Abb. 46). Projiziert man nun den Körper jeweils senkrecht auf die jeweiligen Flächen der räumlichen Ecken, so erhält man sogenannte Körperrisse: Grundriß, Aufriß, Seitenriß (beispielsweise von rechts) bzw. senkrechte Körperansichten (Draufsicht, Vorderansicht, Seitenansicht (beispielsweise von rechts)). Klappt man jetzt die Ebenen der räumlichen Ecken mit ihren jeweiligen Körperbildern in die Grundrißebene, so erhält man ein sogenanntes Dreitafelbild.

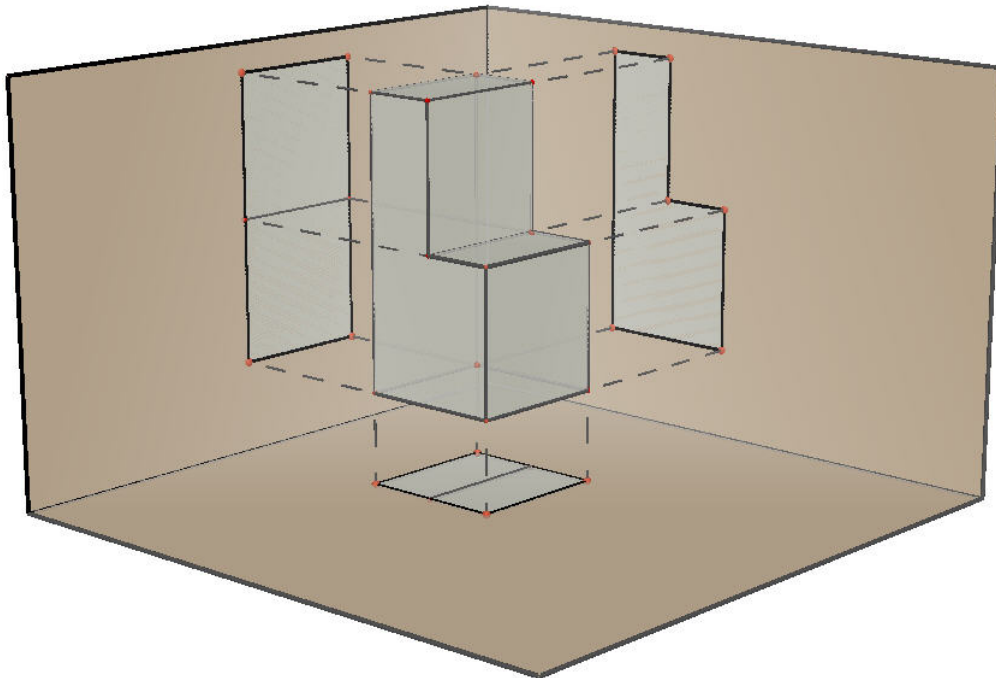


Abb. 48 Senkrechte Körperprojektion auf die Flächen (Tafeln) einer räumlichen Ecke

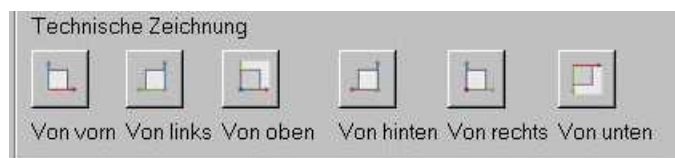


Abb. 49 Senkrecht-projektive Tafelansichten (Optionen in Cabri 3D)

In der Abbildung 47 befinden sich alle sechs möglichen Optionen von Rissen bzw. Ansichten eines Körpers bei senkrechter Projektion auf einer der sechs Ebenen, die parallel zu den entsprechenden Körperflächen liegen. Unser Körper ist eindeutig bestimmt durch die Vorderansicht (Abb. 48), die Seitenansicht, z. B. von rechts (Abb. 49) und die Draufsicht (Abb. 50) bzw. den Aufriß, Seitenriß von rechts und Grundriß. Solche Ansichten bzw. Risse eignen sich besonders für technische Zeichnungen von Objekten, da man aus ihnen ihre Maße bzw. ihre Maßverhältnisse direkt ablesen kann.

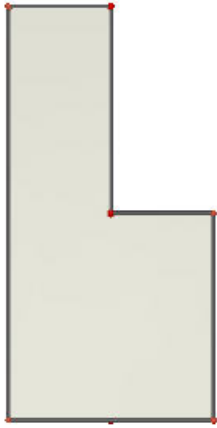


Abb. 50 Vorderansicht

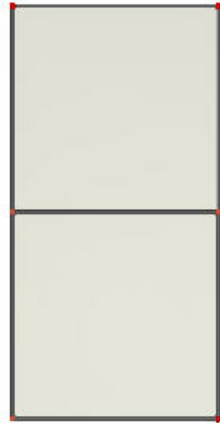


Abb. 51 Seitenansicht von rechts

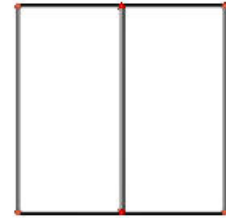


Abb. 52 Draufsicht

Zusatz: Verbindung von Dreitafelprojektion und senkrechter Axonometrie

Wir konstruieren über den Koordinatenebenen der Vorrichtung einer senkrechten Axonometrie ausklappbare Dreiecke, die die entsprechenden Risse bzw. Ansichten des Körpers tragen (Abb. 53). Nun drehen wir jedes der Dreiecke um die Schnittgerade (Spur) der zugehörigen Koordinatenebene mit der Bildebene (Abb. 54) bis die Dreiecke in der Bildebene zu liegen kommen (Abb. 55). Jetzt fällen wir von den wesentlichen Punkten jedes der Risse die Lotgeraden auf die Drehachsen (Abb. 56). Je drei der Lote schneiden einander in einem Eckpunkt des Körperbildes (Abb. 57), welches mit dem direkt konstruierbaren orthogonal-axonometrischen Bild übereinstimmt.

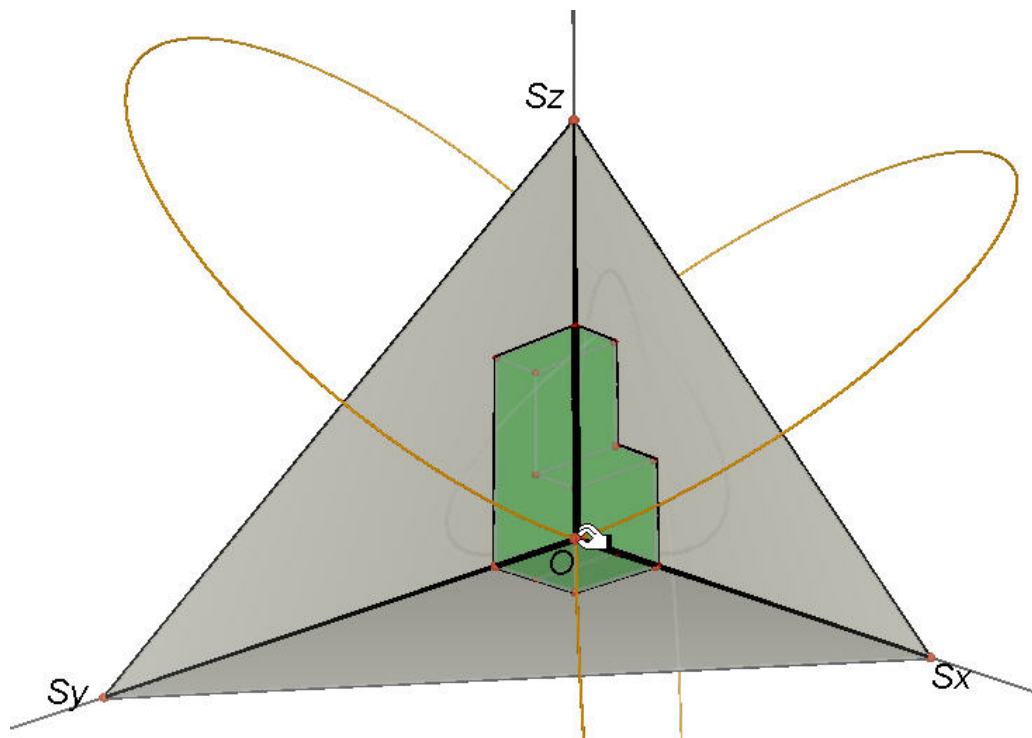


Abb. 53 Aufklappbare Risse des Körpers in den Koordinatenebenen

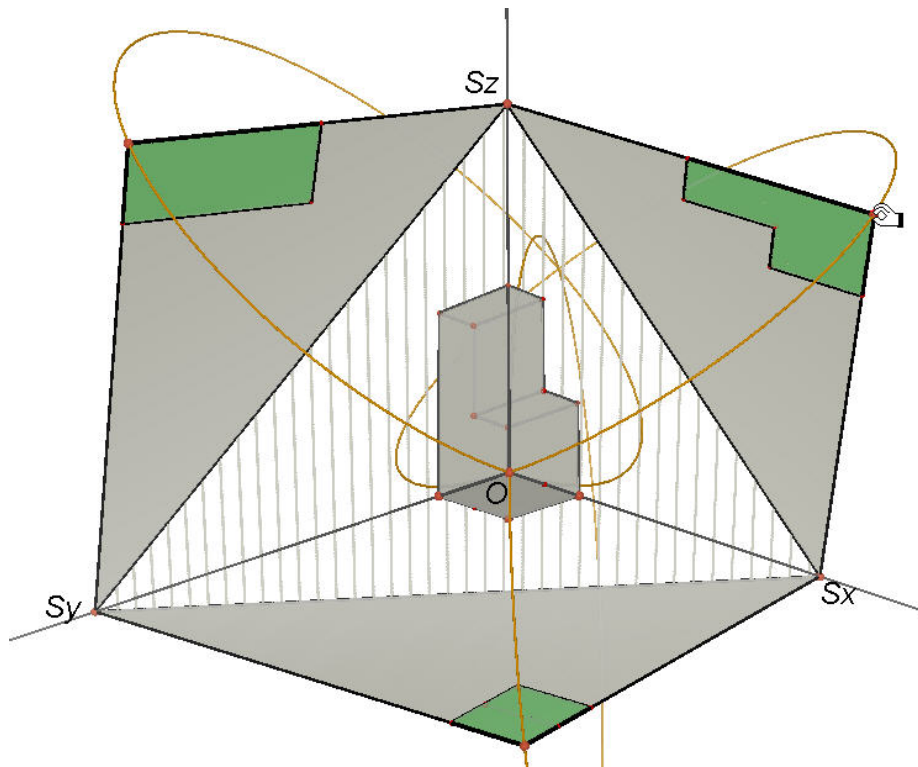


Abb. 54 Ausgeklappte Risse

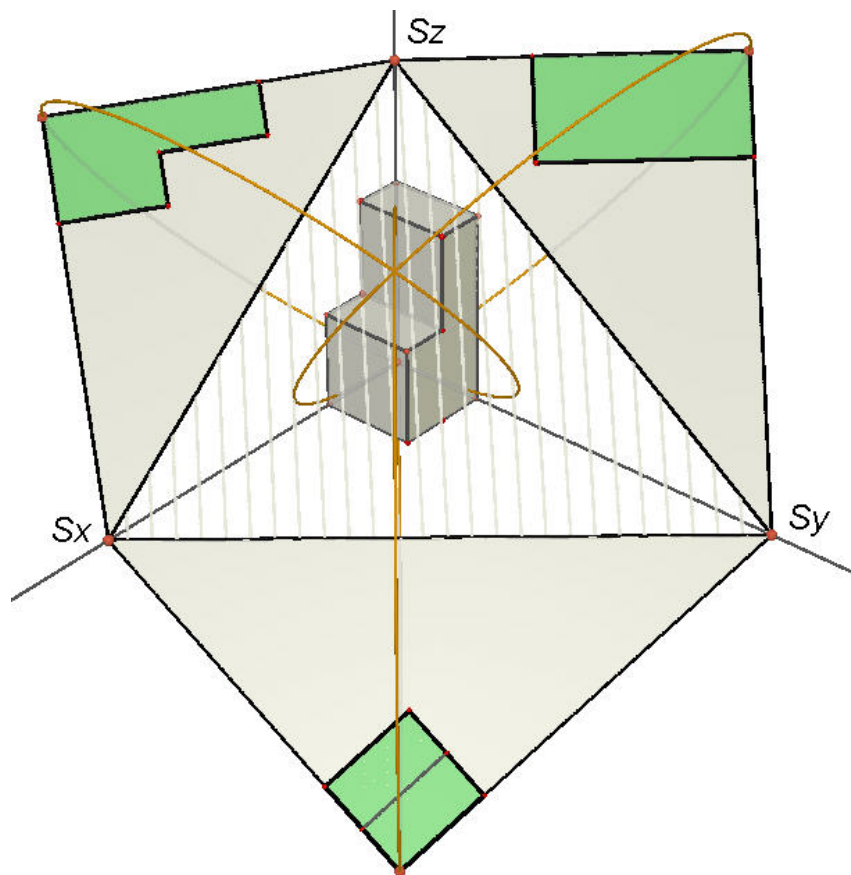


Abb. 55 Risse in der Bildebene

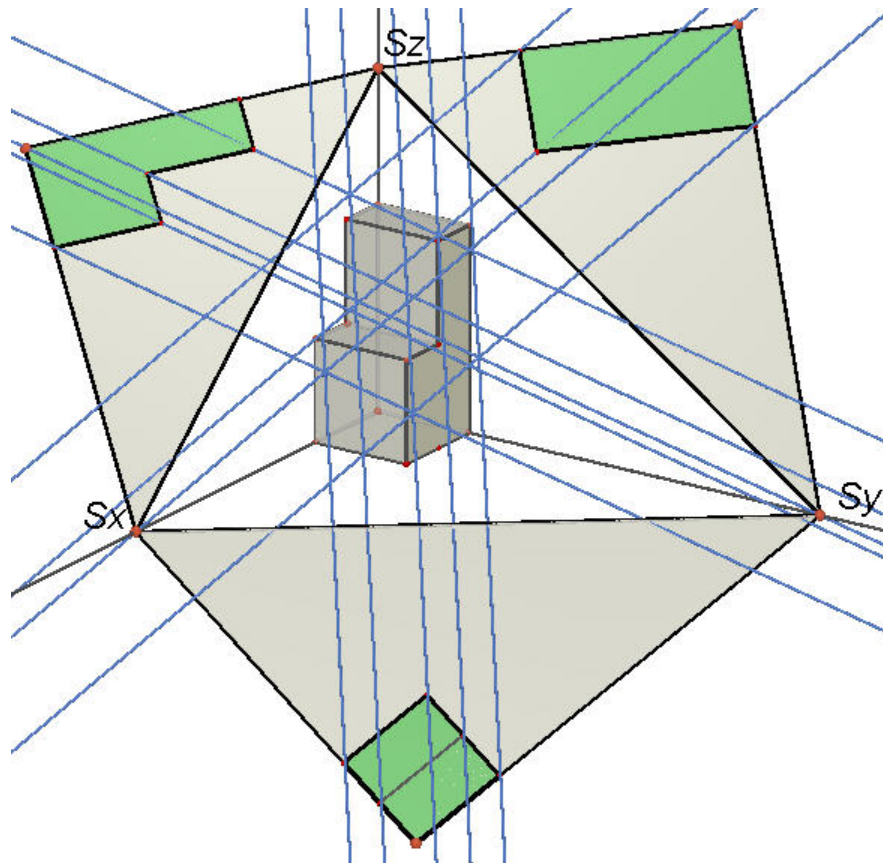


Abb. 56 Risse in der Bildebene mit Loten

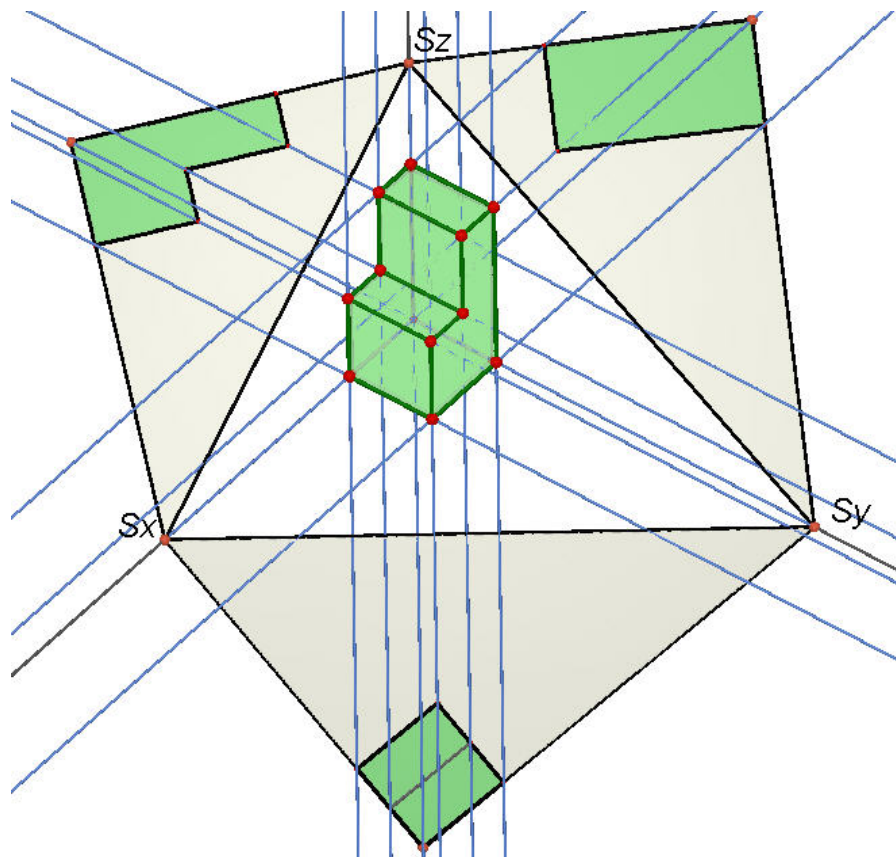


Abb. 56 Rekonstruktion des senkrecht-axonometrischen Körperbildes aus den Rissen

4. Literatur

- Bainville, E., Laborde, J.-M. (2004): Cabri 3D 1.1. (Software). Grenoble: Cabrilog.
Deutsche Version (Bearbeitung von H. Schumann) zu beziehen von www.cotec.de
- Schumann, H. (2005): Zentralprojektion im virtuellen Raum – eine Einführung. In:
Beiträge zum Computereinsatz in der Schule, Jg. 19, Heft 2.
- Schumann, H. (2005): Parallelprojektive Schattenbilder von Körpern mit Cabri 3D. In:
Beiträge zum Computereinsatz in der Schule, Jg. 19, Heft 1.
- Graf, U. (1961): Darstellende Geometrie. Bearbeitet von M. Barner. Heidelberg: Quelle & Meyer