Heinz Schumann

Polyedrische Approximation von Körpern mit Cabri 3D

Die Approximation von konvexen Körpern, deren Oberfläche nicht aus Polygonen besteht, mittels einbeschriebener konvexer Polyeder ist notwendig, um die Operationen an bzw. mit konvexen Polyedern auch für solche Körper ausführen zu können. Zu diesen Operationen gehören z. B. die Schnittkörperbildung, die Körper-durchdringung und das Abfalten eines Netzes; letztere Operation, um mit dem Ausdruck des betreffenden Polyedernetzes ein der ganzheitlichen Wahrnehmung zugängliches Flächenmodell, das den vorstellbaren physischen Körper approximiert, material zu konstruieren. Zudem können wir den Inhalt der Körperoberfläche näherungsweise bestimmen durch den Flächeninhalt eines der Netze des approximierenden Polyeders. Die näherungsweise Volumenbestimmung des Körpers kann über die Zerlegung des approximierenden Polyeders in entsprechende Pyramiden erfolgen.
Die polyedrische Approximation der nicht nur in der Schulgeometrie zu behandelnden nichtpolyedrischen Standardkörper: Kreiszylinder, Kreiskegel, Kugel, abgeschnittener Kreiszylinder, Kreiskegelstumpf und anderer Körper wie z. B. das Konoid und das Oloid, wird dabei mittels konvexer Hülle aus Polyederecken, -kanten oder -flächen generiert. Kreise bzw. Kreisflächen, die den betreffenden Körper erzeugen bzw. die Teile seiner Oberfläche bilden, approximieren wir hier in der Regel mit regelmäßigen Vielecken der Eckenanzahl 24, die den Kreisen einbeschrieben sind. Diese Art der Approximation genügt den Ansprüchen einer angemessenen „Rundung“ der Körperoberfläche im wahrgenommenen virtuellen Raum als auch im physischen Modell, falls sich eine mögliche maßstäbliche Vergrößerung in Grenzen hält. Eine Erhöhung der Eckenanzahl über 24 hinaus hätte zu feinstrukturierte bzw. unübersichtliche Netze zur Folge.
Da es keinen optimalen Abfalt-Algorithmus für konvexe Polyeder gibt, kann es auch in Ausnahmefällen zu Überlappungen von Teilen desselben Netzes kommen.
Viele Netze haben symmetrische Form und wirken deshalb ästhetisch.
Eine Variation der Größe bzw. Form der approximierenden Polyeder durch individuelles Verziehen, bewirkt eine, der „Philosophie“ der dynamischen Geometrie entsprechende Änderung des abgefalteten Netzes.

Körperapproximationen (Beispiele)

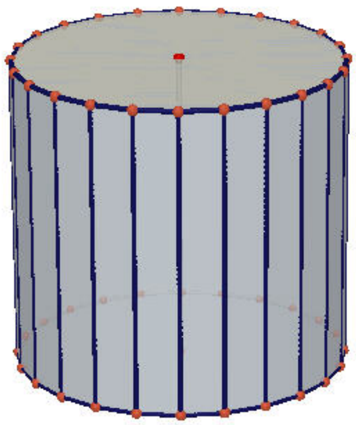


Abb. 1

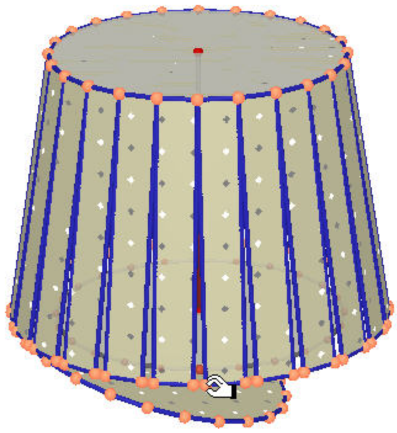


Abb. 2

Die Abbildung 1 zeigt ein gerades Prisma mit einer regelmäßigen 24-seitigen Grundfläche, das einen **Kreiszylinder** approximiert. Mit der Abfaltautomatik öffnen wir seine Oberfläche zu einem Netz (Abb. 2), das wir verziehen können, bis es in einer Ebene zu

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

liegen kommt (Abb. 3). In paralleler Lage zur Bildschirmebene (Abb. 4, „Netzansicht“) kann man es ausdrucken, um nach dem Ausschneiden das Näherungsmodell zu basteln. – Bei Kreiszylinder und -kegel liefert der herkömmliche Modellbau natürlich bessere Ergebnisse.

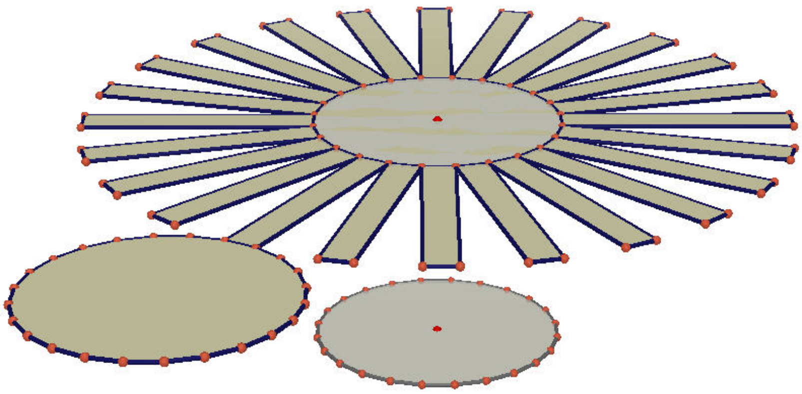


Abb. 3

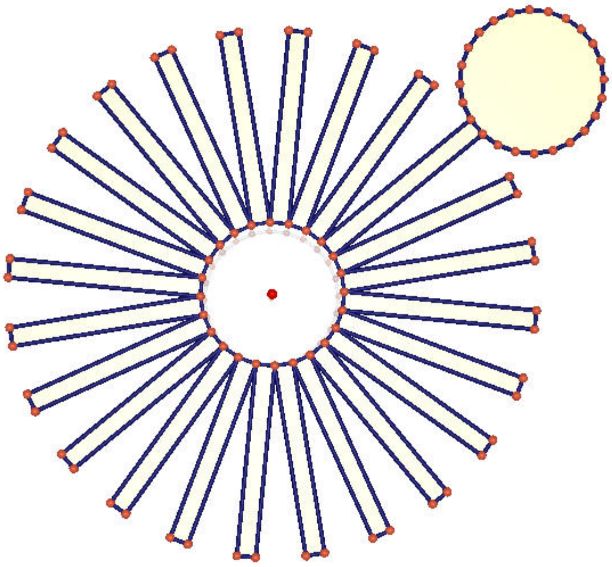
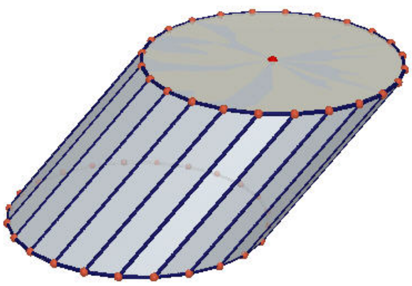


Abb. 4

Eine Approximation eines **schiefen Kreiszylinders** (Abb. 5) hat eine Netzabfaltung wie in Abbildung 6.



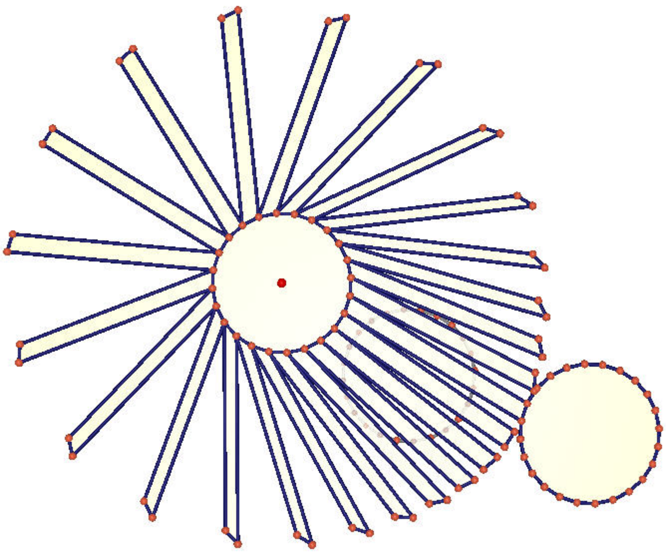


Abb. 5 Abb. 6

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

Ein **schräg abgeschnittener Kreiszylinder** ist in Abbildung 7 approximiert; die zugehörige Netzabfaltung ist in Abbildung 8 zu sehen.

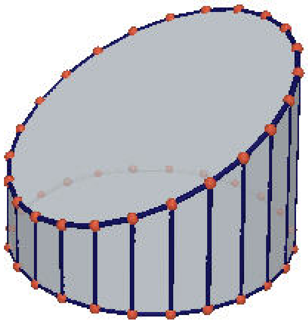


Abb. 7

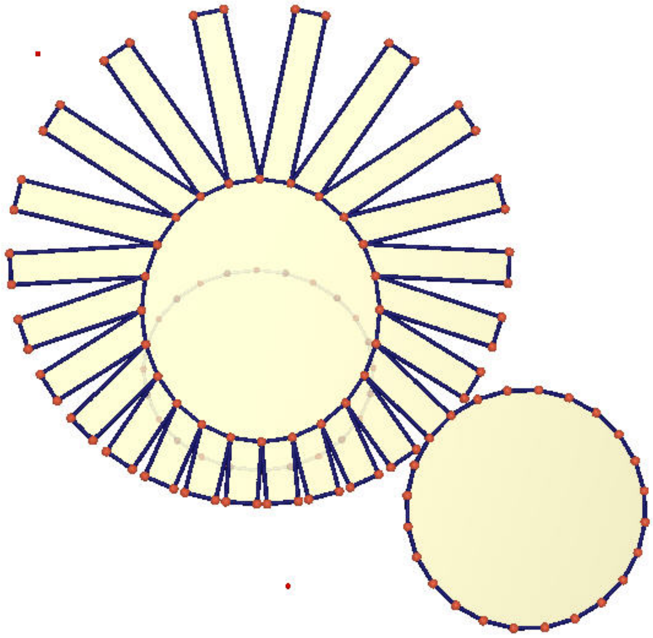


Abb. 8

Ein **gerader Kreiskegel** ist in Abbildung 9 durch eine Pyramide mit regelmäßiger 24-seitiger Grundfläche approximiert; ihre Abwicklung befindet sich in Abbildung 10.

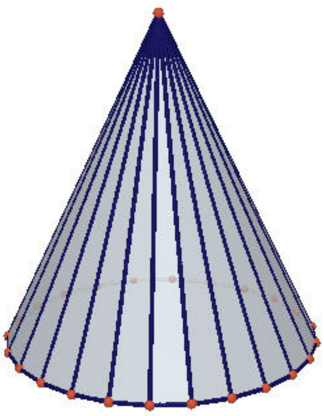


Abb. 9

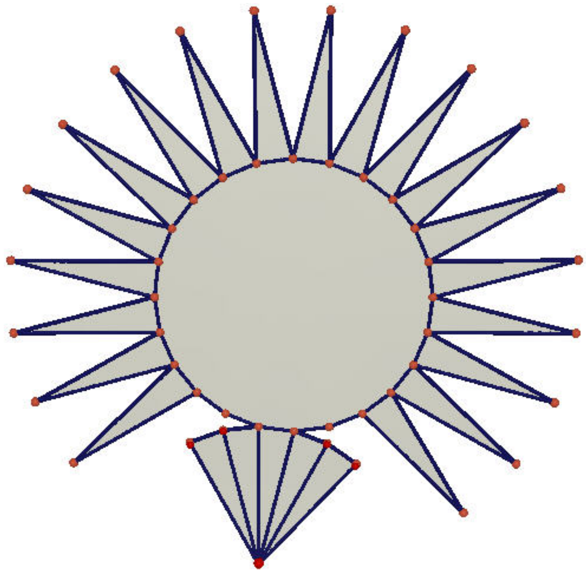


Abb. 10

Ein (**schräg) abgeschnittener Kegel, auch Kegelstumpf** ist in Abbildung 11 approximiert; er hat eine Abfaltung wie in Abbildung 12.
Ein **schiefer Kreiskegel** ist in Abbildung 13 durch eine entsprechende schiefe Pyramide approximiert; die Form des abgefalteten Netzes lässt ageometrische Interpretationen zu (Abb. 14).

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

Anmerkung: Wir erkennen, dass sich die Abfaltautomatik nicht erwartungskonform verhält, denn die „Mantelflächen“ der abwickelbaren Körper (Torsen) werden nicht als Ganzes abgefaltet.

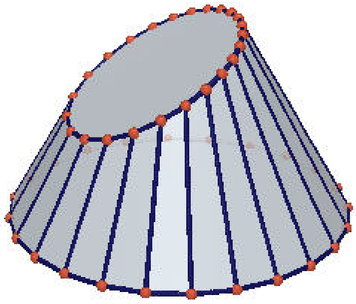


Abb. 11

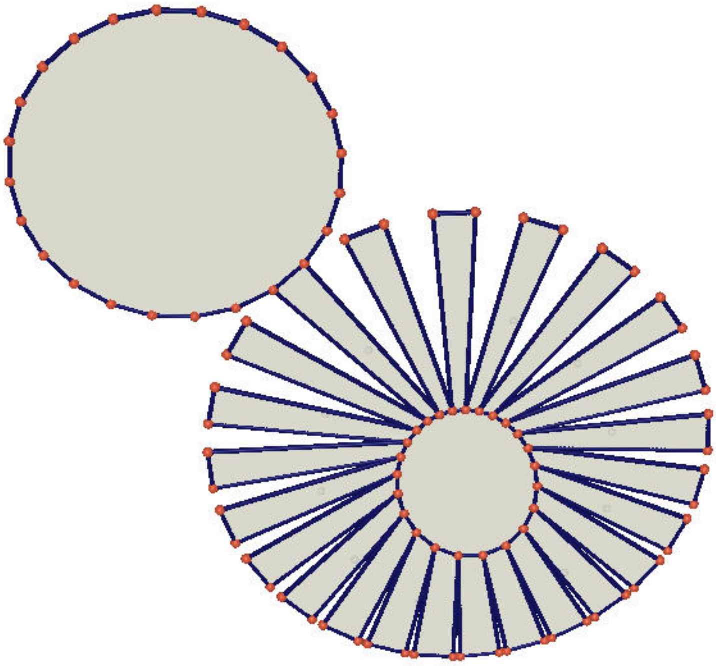


Abb. 12

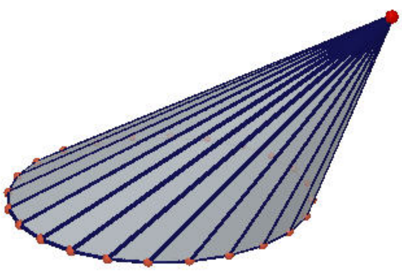


Abb. 13

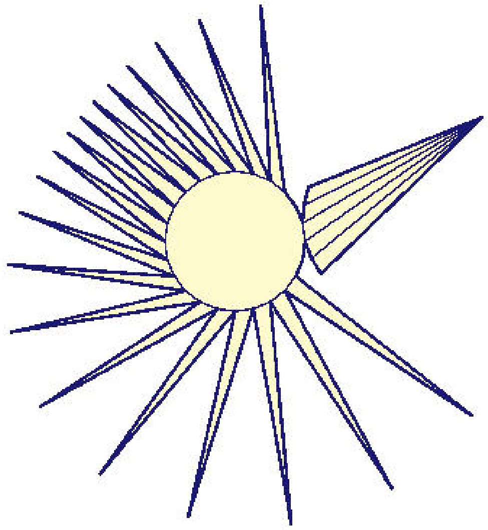


Abb. 14

Die **Kugel** approximieren wir zuerst mittels 6 regelmäßiger 12-Ecke, die durch die „Pole“ gehen (Abb. 15). Die Oberfläche des approximierenden Polyeders wird, gemäß seiner Konstruktion, aus zwei Gruppen zu je 24 einander kongruenten gleichschenkligen Trapezen und aus 24 einander kongruenten gleichschenkligen Dreiecken gebildet. Das entsprechende Netz lässt keine geordnet Struktur erkennen (Abb. 16).
Verdoppelt man die Anzahl der Flächen, indem man das die Kugel approximierende Polyeder aus einem regelmäßigen 24-Eck erzeugt (Abb. 17), so erhält man ein unübersichtliches Netz mit Überlappungen (Abb. 18, mit einer noch nicht planar gemachten Abfaltung).
Da die Kugeloberfläche oder die Oberfläche von Kugelteilen nicht in die Ebene abgewickelt werden können, kommt der polyedrischen Approximation eine weitreichende Bedeutung zu.

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

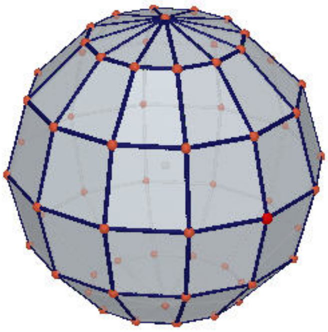


Abb. 15

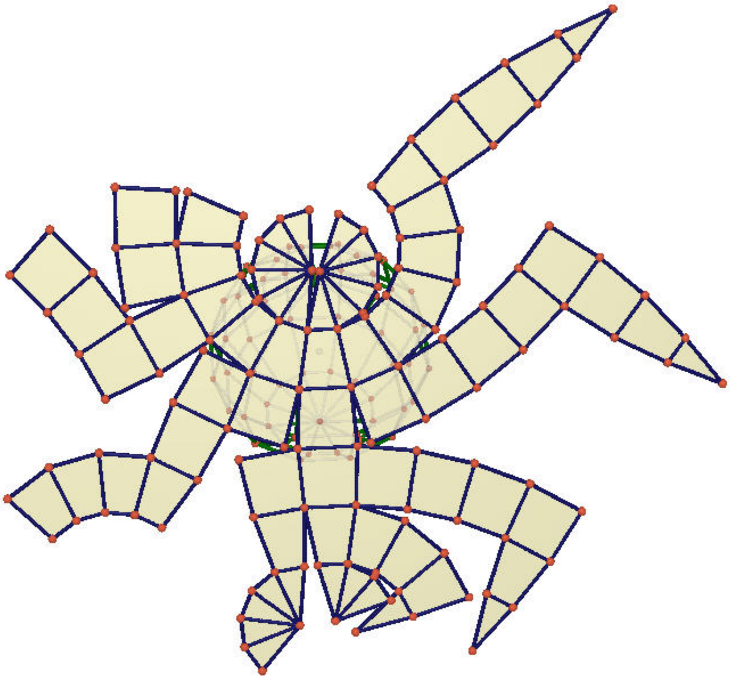


Abb. 16

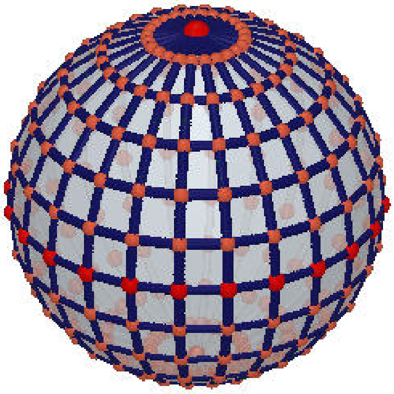


Abb. 17

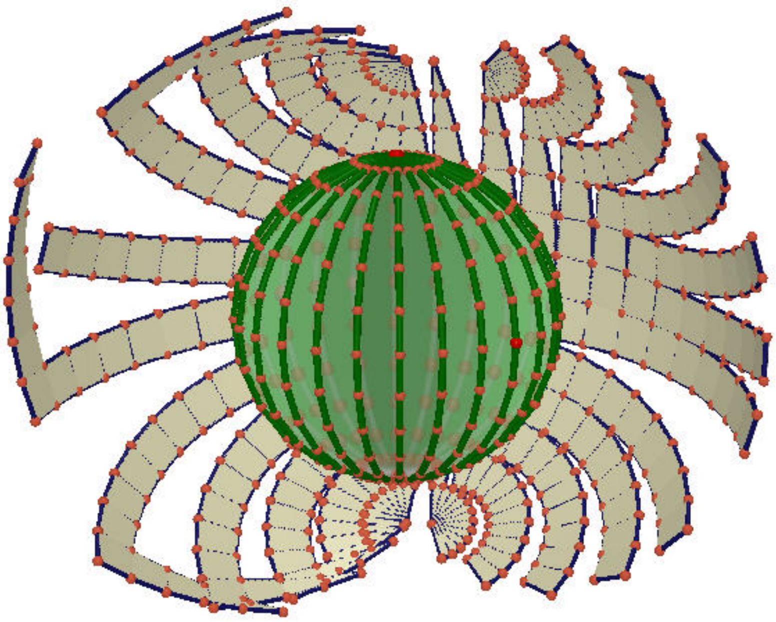


Abb. 18

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany

Wir schließen mit zwei interessanten, aber in der Schulgeometrie üblicherweise nicht behandelten Körpern: dem **Konoid** (Approximation in Abbildung 19; Netz in Abbildung 20) und dem **Oloid** (Approximation in Abbildung 21; das Netz in Abbildung 22 gibt Anlass zu figürlichen Assoziationen).

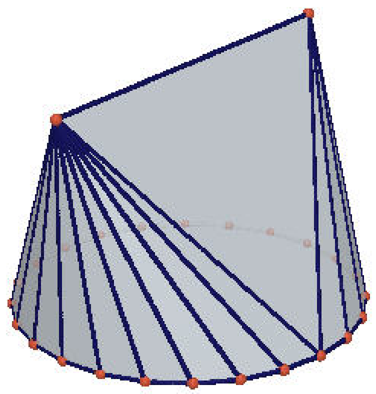


Abb. 19

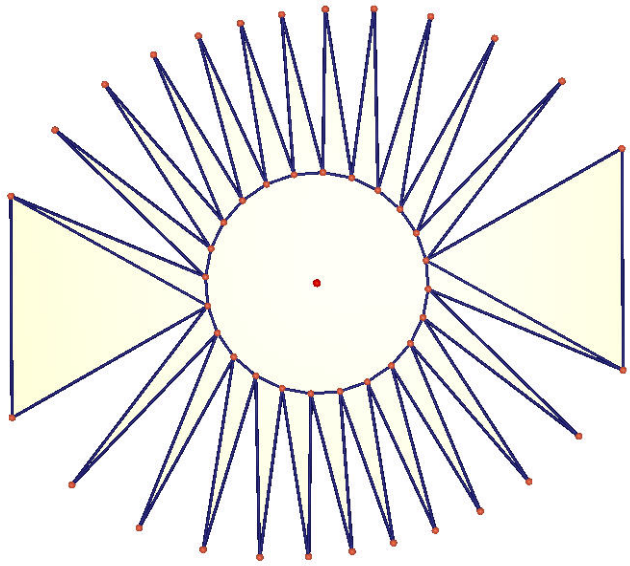


Abb. 20

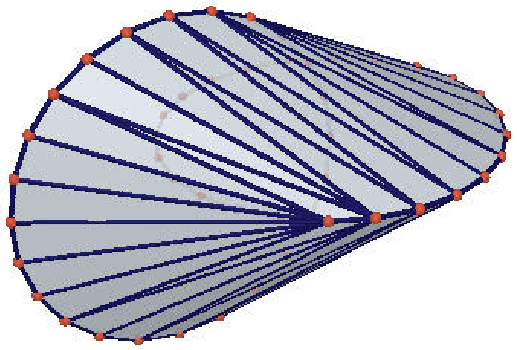


Abb. 21

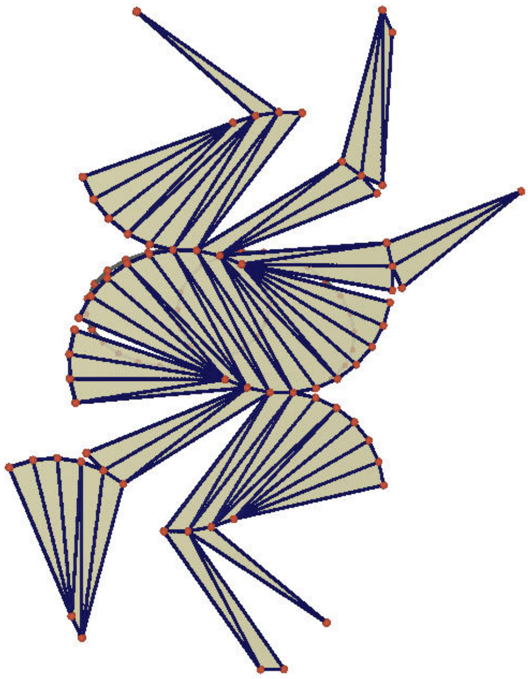


Abb. 22

© 2005 by Dr. Heinz Schumann, University of Education (PH) Weingarten/Germany