Heinz Schumann

6 Computerunterstütztes Lösen raumgeometrischer Berechnungsaufgaben

Alter Wein - in neuen Schläuchen?

6.1 Einleitung

Die Elementargeometrie ist ein mächtiges Modellierungswerkzeug unserer Wirklichkeit. Das äußert sich u.a. in ihren ingenieurwissenschaftlichen und handwerklichen Anwendungen, in denen vor allem elementargeometrische Berechnungen einen breiten Raum einnehmen. Die Schulgeometrie, besonders die im deutschen Sprachraum, verfügt über eine bis in's 18. und 19. Jahrhundert reichende Tradition geometrischen Berechnens, das sich als Unterrichtsgegenstand sowohl durch seine Anwendungsrelevanz als auch durch seine Relevanz für das Üben des mathematischen Problemlösens legitimieren lässt. Heute artikuliert sich diese Tradition vor allem in den geometrischen Berechnungsaufgaben als Prüfungsaufgaben für den Mittleren Schulabschluß und in den geometrischen Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die entsprechenden schriftlichen Prüfungen. Die unterrichtliche Behandlung (raum-)geometrischer Berechnungsaufgaben befindet sich deshalb in einer gewissen inhaltlichen und methodischen Erstarrung.
Voraussetzung für das Lösen geometrischer Berechnungsaufgaben ist, neben dem entsprechenden heuristischen und geometrischen Wissen, besonders die Beherrschung des arithmetisch-algebraischen Kalküls, auf die hin die Schüler und Schülerinnen (bisher) gedrillt werden müssen. Unter dem Eindruck der Leistungsfähigkeit geeigneter Computerwerkzeuge stellt sich die Frage, ob das Lösen (nicht nur) geometrischer Berechnungsaufgaben durch die Computernutzung eine Methoden-Innovation erfahren kann, dargestalt, dass sich zum traditionellen Behandlungsstandard geometrischer Berechnungsaufgaben neue, nämlich computerunterstützte Standards gesellen, auf das im Spannungsfeld zwischen alten und neuen Standards das Geometrielernen und -lehren lebendig und attraktiv bleibt. Die Verfügbarkeit über Computerwerkzeuge für das schulgeometrische Konstruieren, Messen und Berechnen und über Computerwerkzeuge für das numerische und symbolische Rechnen induziert neue Methoden des Lösens geometrischer Berechnungsaufgaben: das computergrafische Lösen und das computeralgebraische Lösen. Diese Lösungsmodi werden in Abhängigkeit von geeignet gewählten

Werkzeugen erläutert und in der Art einer Gesamtbehandlung an Beispielen konkretisiert. - Die Aufassung des Computers als kognitives Werkzeug (Dörfler 1991) kommt voll zum Tragen.

Im folgenden erläutern wir solche neuen Standards für das Lösen (raum-) geometrischer Berechnungsaufgaben in Abhängigkeit geeignet gewählter Computerwerkzeuge. Wir können im wesentlichen zwei Arten von computer-unterstützten Lösungsstandards unterscheiden:

- **das computergrafische Lösen**
- **das computernumerische u. -algebraische Lösen.**

Unter dem **computergrafischen Lösen** wollen wir hier die Lösungsmöglichkeiten verstehen, die uns durch die Nutzung computergrafischer Werkzeug für das interaktive Variieren (im Zugmodus), Konstruieren, Messen von Körpern, wie z.B. das Tool KÖRPERGEOMETRIE (Bauer et al. 1998/1999) an die Hand gegeben sind. Das Vorgehen kann durch folgende Schritte grob beschrieben werden:

- Variiere den Körper bis er die gegebenen Daten (näherungsweise) annimmmt.
- Zeichne gegebenenfalls Objekte ein, deren Größe gesucht ist.
- Lies die Messwerte der gesuchten Größen ab und/oder lasse die entsprechenden Objekte in wahrer Form anzeigen.

Das grafische Lösen ist natürlich nur für sogenannte spezielle Berechnungs-aufgaben möglich (durch Variation des betreffenden Körpers gemäß des veränderten Datensatzes beherrscht man quasi alle Berechnungsaufgaben derselben Klasse) . Die per Augenmaß erzielten Lösungen sind Näherungswerte für die gesuchten Größen. Wegen der Pixelgrafik ist die Güte der Lösungen gering.

Der Vorteil des grafischen Lösens besteht in der experimentellen, anschaulich-geometrischen Durchdringung der Aufgabenstellung ohne Behinderung durch die arithmetisch-algebraischen Barrieren.

Das **computernumerische u. -algebraische Lösen** bedeutet das Lösen von speziellen und allgemeinen (raum-)geometrischen Berechnungsaufgaben mit Hilfe der Löse-Automatiken der Computeralgebra-Komponenten mathematischer Assistenz-programme, hier der von DERIVE und MATHEMATICA.

Es sind zwei Arten computernumerischer/-algebraischer Lösungsmethoden für das Lösen (raum-)geometrischer Berechnungsaufgaben zu unterscheiden:

- die **„Substitutionsmethode“** mittels DERIVE
- die **„Ansatzmethode“** mittels MATHEMATICA.

Im folgenden beschreiben wir beide Methoden, die dann auf Aufgabenbeispiele angewendet werden sollen.

Die Substitutionsmethode:

Es ist eine „wesentliche“ Gleichung (Formel etc.) aufzustellen, in der alle Variablen mit Ausnahme der gesuchten zu substituieren sind. Um die zu ersetzenden Variablen zu gewinnen, benötigt man Hilfsgleichungen, die nach diesen mit der Löse-Automatik (Solve) aufzulösen sind usw.

Die Ersetzungen erfolgen dabei interaktiv mittels der Option „Substituieren“ oder mittels Definition globaler Variablen (ersetzungsgleich „:=“) und „Vereinfachen“ in die Tiefe. Die wesentliche Gleichung wird dann nach der gesuchten aufgelöst, falls diese nicht schon mit isolierter gesuchter Variablen vorliegt. Damit ist die allgemeine Berechnungsaufgabe gelöst. In den algebraischen Lösungsterm kann man nun bei einer speziellen Berechnungsaufgabe die gegebenen Werte einsetzen, um die näherungsweise (mit „Approximate“) oder exakte numerische Lösung (mit „Vereinfachen“) zu erhalten. Aus dem (den) algebraischen Lösungsterm(en) entnimmt man gegebenenfalls die Lösbarkeitsbedingung für (positive) reelle Lösungen. Für das weitere Berechnen und modulare Arbeiten sind mit geeigneter Namensgebung Berechnungsmakros in Abhängigkeit von den gegebenen Variablen zu definieren.

Die Ansatzmethode:

Der Ansatz für eine Berechnungsaufgabe besteht dabei aus:

- einer Menge von (impliziten) algebraischen Gleichungen, die die durch die Aufgabenstellung gegebenen Beziehungen zwischen gegebenen und gesuchten Größen sowie Hilfsgrößen vollständig beschreiben
- der Menge der gesuchten Größen
- einer Menge von zu eliminierenden Hilfsgrößen.

Ein solcher Ansatz ist zu entwickeln und dann zu implementieren.

Implementationsform in MATHEMATICA unter Verwendung eines modifizierten Solve (Gloor, O. u. Schumann, H. 1996):

Für <u>spezielle Berechnungsaufgaben</u>:

(N)Loese[{ Wertzuweisungen,

Algebraische Gleichungen},
{Gesuchte Größen},
{Hilfsgrößen}]

‘NLoese’ steht für das näherungsweise (numerische) Lösen, ‘Loese’ für das exakte (numerische) Loesen.

Für allgemeine Berechnungsaufgaben:

Loese[{ Algebraische Gleichungen},
{Gesuchte Größen},
{Hilfsgrößen}]

‚Loese‘ steht für das algebraische Lösen.

Nach der Ausführung des entsprechenden Löse-Kommandos ist das Ergebnis zu interpretieren. Bei der allgemeinen Lösung ist zu entscheiden, welche der ausgegebenen Lösungen überhaupt Lösungen sein können; außerdem sind die Lösbarkeitsbedingungen für reelle Lösungen und für den Aufgabenkontext herauszufinden und zu diskutieren.

Die Vorteile eines derartigen numerischen und algebraischen Lösens bestehen vor allem in der Konzentration auf die heuristischen Entwicklung des Ansatzes, als der eigentlich originären geistigen Arbeit des menschlichen Aufgabenlösers, dem Wegfallen des routinehaften Ausführens von Algorithmen. Das ansatzorientierte Lösen verstärkt den Aspekt der Lösungsplanung sowie der Lösungsinterpretation und trägt so zu einer Verbesserung der sogenannten Methodenkompetenz beim (computerunterstützten) Lösen mathematischer Aufgaben bei. Das Handlungsschema zum Lösen von Berechnungsaufgaben, hier von (raum-) geometrischen Berechnungsaufgaben, nach Polya (1949), ist entsprechend zu modifizieren (Schema).

Anleitung zum Lösen
(raum-)geometrischer Berechnungsaufgaben
mittels Loese-Automatik

1. **Verstehe die Aufgabe!**
   Verstehst Du alles, was im Text steht? Skizziere eine entsprechende Figur. Unterstreiche im Text alles, was wichtig ist. Was unwichtig ist, streiche durch. Was ist gegeben, was ist gesucht? Zeichne, soweit möglich, gegebene und gesuchte Stücke in die Figur ein. (Verwende auch verschiedene Farben.) Wähle geeignete Bezeichnungen. Welches sind die Bedingungen? Kennst Du eine ähnliche Aufgabe, die Du schon bearbeitet hast?

2. **Plane die Lösung! - Finde den Ansatz!**
   Welche Beziehungen bestehen zwischen dem was gegeben ist und dem was gesucht ist?
   Passt ein Dir schon bekannter Plan oder passen wenigstens Teile davon?
   Stelle alle möglichen Gleichungen auf. Verwende dabei ganze Wörter, damit man versteht, was gemeint ist. Vielleicht mußt Du Hilfsgrößen, z. B. für Zwischenrechnungen, einführen, um das Gegebene und das Gesuchte in Gleichungen auszudrücken. Hast du alle Bedingungen, die in der Aufgabe vorkommen, berücksichtigt?
   Prüfe nach, ob Dein Ansatz vollständig ist. (Notwendigerweise muss Dein Ansatz so viele Gleichungen haben wie gesuchte Größen und Hilfsgrößen zusammen.)
   Kannst Du noch einen anderen Ansatz für die Lösung finden?

3. **Lass Deinen Plan ausführen!**
   Gib Deinen Ansatz so ein: Zuerst die Menge der Gleichungen, dann die Menge der gesuchten Größen und zum Schluß die Menge der Hilfsgrößen.
   Lass' Deinen Ansatz mit der Loese-Automatik auflösen.

4. **Kontrolliere die ausgegebene Lösung!**
   Ist das Ergebnis sinnvoll, d. h. kommt heraus, was Du erwartet hast? Andernfalls überprüfe Deinen Ansatz. Mache eine Probe, indem Du im Ansatz das Gesuchte mit dem Gegebenen vertauschst und darauf die Loese-Automatik anwendest.

5. **Formuliere das Ergebnis!**
   Schreibe einen Antwortsatz.

Schema

Eine vergleichende Bewertung beider Lösungsmethoden:

Das Lösen mit den DERIVE ist im wesentlichen eine Simulation des händischen Lösens mit dem Unterschied, dass man Auflösen, Ersetzen und Vereinfachen lässt. DERIVE ist aber entsprechend zu steuern, was voraussetzt, dass gewisse Erfahrungen mit dem händischen Lösen gemacht worden sind. Der prozesshafte Charakter

des Lösens von Berechnungsaufgaben geht aber nicht verloren. Von Vorteil ist u.a. die Möglichkeit der Definition von Berechnungsmakros, die als Black-Box-Bausteine für ökonomisches Berechnen weiter verwendet werden können.
Das ansatzorientierte Lösen mit MATHEMATICA ist gegenüber dem händischen Lösen und der Substitutionsmethode mit DERIVE ganz neuartig. Es verlangt bei der Aufstellung des Ansatzes bei komplexeren Aufgaben einen hohen Planungsaufwand. Das Finden und Formulieren des Ansatzes, der ein algebraisches Gleichungssystem sein muss, ohne vorheriges teilweises Auflösen und Bearbeiten von Gleichungen, rückt in den Vordergrund vor der Steuerung eines Lösungsprozesses - der Auflösungsprozess ist unter der Oberfläche verschwunden. Es muss stets geprüft werden, ob der Ansatz vollständig ist, d.h., ob notwendigerweise so viele Gleichungen (ohne Wertzuweisungen) im Ansatz vorkommen, wie gesuchte und Hilfsvariablen zusammen.
Von Vorteil ist hier u.a., dass der Ansatz variiert werden kann, indem gegebene Variablen zu gesuchten gemacht bzw. Hilfsvariablen mit gesuchten Variablen ausgetauscht werden können.
Beide computeralgebraischen Methoden ergänzen einander, da sie unterschiedliche, aber für sich wesentliche Aspekte des Lösens von Berechnungsproblemen berücksichtigen.

Die Lösungsstandards sind nicht isoliert zu sehen, sondern sie induzieren eine computerunterstützte Gesamtbehandlung von (speziellen) Berechnungsaufgaben. Wir schlagen die nachstehende Reihenfolge bei der systematischen Bearbeitung einer (raum-)geometrischen Berechnungsaufgabe im Unterricht vor, die durch zunehmende Abstraktion gekennzeichnet ist:

Grafisches Lösen

Lösen mit der Substitutionsmethode

Lösen mit der Ansatzmethode

Natürlich muss diese Abfolge nicht vollständig sein, auch kann von ihr abgewichen werden, wenn z.B. eine numerische Lösung durch eine grafische Lösung veranschaulicht oder kontrolliert werden soll usw.
Im folgenden konkretisieren wir die vorstehende programmatische Methodenübersicht an einigen stereometrischen Beispielen, die man bei der Fülle raumgeometrischer Berechnungsaufgaben selbstverständlich nicht als repräsentativ bezeichnen kann, die aber verdeutlichen sollen, wie mit den genannten Computerwerkzeugen raumgeometrisches Berechnen heute durchzuführen ist.

6.2 Aufgabenbeispiele

Aufgabe 1

Von einem Quader sind die Länge (l = 5 cm), die Oberfläche (O = 120 m²) und das Volumen (V = 80 cm³) bekannt. Bestimme die Größe der restlichen Kanten (b, h).

Computergrafisches Lösen:
Wir verziehen in KÖRPERGEOMETRIE die Ecken eines Quaders (Abb. 6.1.1). Diesen Vorgang können wir auch durch Einfügen der jeweils aktuellen Werte in eine Tabelle unterstützen (Abb. 6.1.2). Den Quader erhalten wir als materiales Flächenmodell, indem wir sein Netz erzeugen lassen (Abb. 6.1.3), ausdrucken, ausschneiden und auffalten.

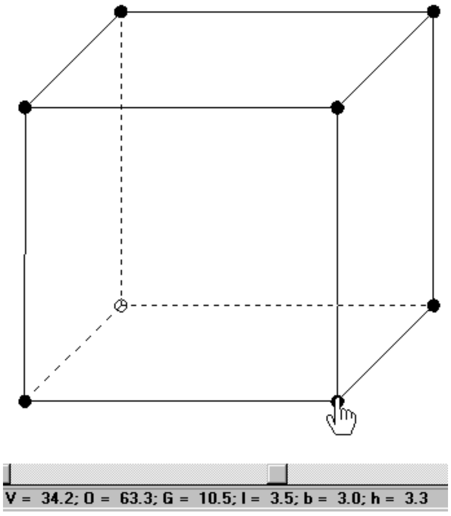

Abb. 6.1.1

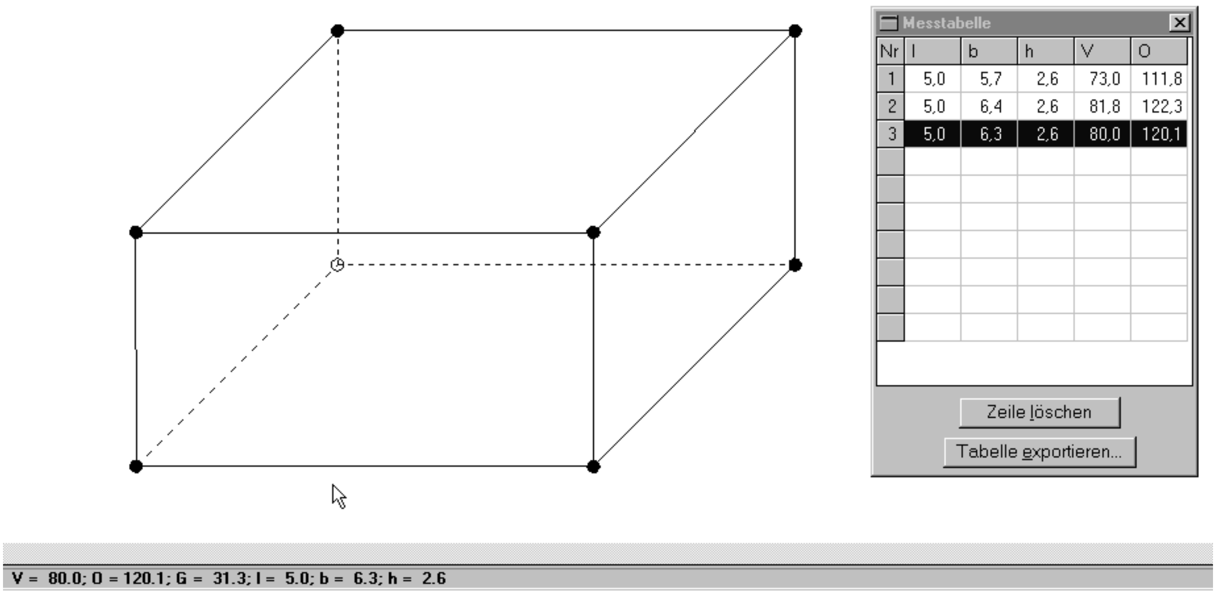

Abb. 6.1.2

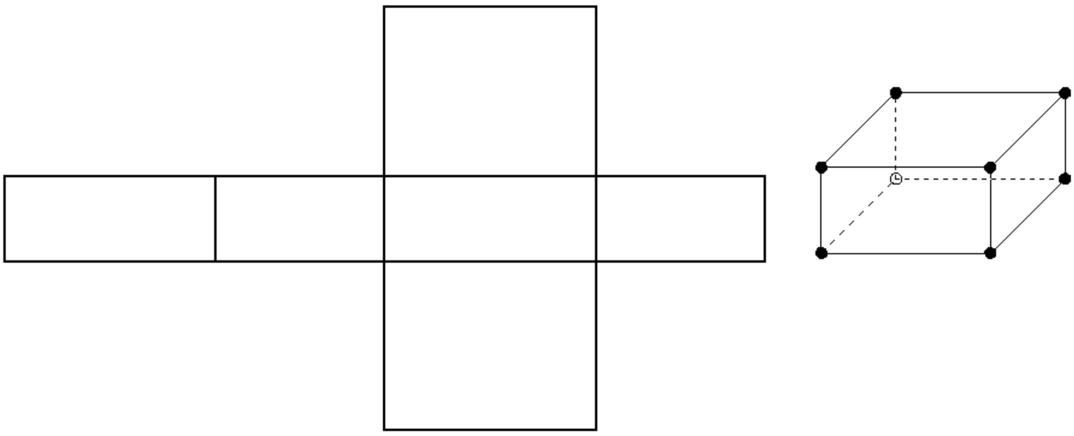

Abb. 6.1.3

Computernumerisches u. computeralgebraisches Lösen mit DERIVE:

Wir geben die Oberflächen- und Volumenformel des Quaders ein (Ausdruck 1.1, Zeile 1/2), lösen O nach b und V nach h auf; substituieren h in b, und lassen die Gleichung nach b auflösen (wegen der zwei Lösungen handelt es sich um eine quadratische Gleichung, was wir aber erst nach Umformung erkennen könnten; DERIVE erkennt übrigens nicht, dass $O^2l^2 - 4OVl + 4V^2$ faktorisiert werden kann.) Durch Rücksubstitution gibt es auch für h zwei Lösungen. Wir erkennen, dass die Lösungspaare b, h bis auf Vertauschung übereinstimmen, es also nur ein Quader mit den gegebenen Größen existieren kann.

#1: $O = 2\cdot(l\cdot b + b\cdot h + h\cdot l)$

#2: $V = l\cdot b\cdot h$

#3: $\left[b = \dfrac{O - 2\cdot h\cdot l}{2\cdot(h + l)}\right]$

#4: $\left[h = \dfrac{V}{b\cdot l}\right]$

#5: $\left[b = \dfrac{O - 2\cdot\dfrac{V}{b\cdot l}\cdot l}{2\cdot\left(\dfrac{V}{b\cdot l} + l\right)}\right]$

#6: $\left[b = \dfrac{\sqrt{(O^2\cdot l^2 - 4\cdot O\cdot V\cdot l + 4\cdot V^2 - 16\cdot V\cdot l^3)} + O\cdot l - 2\cdot V}{4\cdot l^2},\ b = -\dfrac{\sqrt{(O^2\cdot l^2 - 4\cdot O\cdot V\cdot l + 4\cdot V^2 - 16\cdot V\cdot l^3)} - O\cdot l + 2\cdot V}{4\cdot l^2}\right]$

#7: $\left[h = -\dfrac{\sqrt{(O^2\cdot l^2 - 4\cdot O\cdot V\cdot l + 4\cdot V^2 - 16\cdot V\cdot l^3)} - O\cdot l + 2\cdot V}{4\cdot l^2}\right]$

#8: $\left[h = \dfrac{\sqrt{(O^2\cdot l^2 - 4\cdot O\cdot V\cdot l + 4\cdot V^2 - 16\cdot V\cdot l^3)} + O\cdot l - 2\cdot V}{4\cdot l^2}\right]$

Ausdruck 1.1

Durch Einsetzen der gegebenen Werte in die Lösungsterme erhalten wir die gesuchten Werte für b und h exakt und gerundet (Ausdruck 1.2, Zeile 9-14). In Zeile 15/16 definieren wir b und h als von l, O und V abhängige Berechnungsmakros. Das Einsetzen der gegebenen Werte in diese Terme liefert die ebenfalls die gesuchten Kantenlängen, exakt und näherungsweise. Existiert immer ein Quader für vorgegebene Werte l, O, V? – Eine notwendige Bedingung für die Existenz: der Radikand muss größer/gleich null sein (Ausdruck 1.3, Zeile 23); so z.B. gibt es für l = 5, O = 100, V = 80 keinen Quader, denn die Oberfläche ist zu klein gewählt, um das Volumen quaderförmig einzupacken. Die Auflösung der Lösbarkeitsungleichung nach O liefert zwei Faktoren, deren Produkt genau dann größer/gleich null ist, wenn beide vorzeichengleich usw.

$$\#9: \frac{\sqrt{120^2\cdot 5^2 - 4\cdot 120\cdot 80\cdot 5 + 4\cdot 80^2 - 16\cdot 80\cdot 5^3} + 120\cdot 5 - 2\cdot 80}{4\cdot 5^2}$$

$$\#10: \frac{2\cdot\sqrt{21}}{5} + \frac{22}{5}$$

$$\#11: 6.23303$$

$$\#12: -\frac{\sqrt{120^2\cdot 5^2 - 4\cdot 120\cdot 80\cdot 5 + 4\cdot 80^2 - 16\cdot 80\cdot 5^3} - 120\cdot 5 + 2\cdot 80}{4\cdot 5^2}$$

$$\#13: \frac{22}{5} - \frac{2\cdot\sqrt{21}}{5}$$

$$\#14: 2.56696$$

$$\#15: b(l, O, V) := \frac{\sqrt{O^2\cdot l^2 - 4\cdot O\cdot V\cdot l + 4\cdot V^2 - 16\cdot V\cdot l^3} + O\cdot l - 2\cdot V}{4\cdot l^2}$$

$$\#16: h(l, O, V) := -\frac{\sqrt{O^2\cdot l^2 - 4\cdot O\cdot V\cdot l + 4\cdot V^2 - 16\cdot V\cdot l^3} - O\cdot l + 2\cdot V}{4\cdot l^2}$$

$$\#17: b(5, 120, 80)$$

$$\#18: \frac{2\cdot\sqrt{21}}{5} + \frac{22}{5}$$

$$\#19: 6.23303$$

$$\#20: h(5, 120, 80)$$

$$\#21: \frac{22}{5} - \frac{2\cdot\sqrt{21}}{5}$$

$$\#22: 2.56696$$

Ausdruck 1.2

Fortsetzung der Aufgabe in Klasse 9/10:
Bestimme den Inhalt bxh des Seitenflächenrechtecks b auf h, die Länge der Raumdiagonalen d des Quaders und den Winkel α zwischen der durch b und l festgelegten Flächendiagonalen und der entsprechenden Raumdiagonalen in Abhängigkeit von l, O, V. Hier verwenden wir mit Vorteil gegenüber dem händischen Rechnen die Berechnungsmakros, um bxh(l,O,V), d(l,O,V), α(l,O,V) zu bestimmen (Ausdruck 1.3). Für die gegebenen Werte erhält man z.B. den noch in`s Gradmaß umzurechnenden Winkelwert, den wir uns in KÖRPERGEOMETRIE nach Einzeichnen der Diagonalen näherungsweise bestätigen lassen (Abb. 6.1.4). – Den Inhalt der definierten Berechnungsmakros, die quasi als Black-Boxes verwendet werden, kann man mittels „Vereinfachen“ ausgeben.

#23: $O^2\cdot l^2 - 4\cdot O\cdot V\cdot l + 4\cdot V^2 - 16\cdot V\cdot l^3 \ge 0$

#24: $100^2\cdot 5^2 - 4\cdot 100\cdot 80\cdot 5 + 4\cdot 80^2 - 16\cdot 80\cdot 5^3 \ge 0$

#25: false

#26: $\left[\left(O - \frac{2\cdot\sqrt{V}\cdot(\sqrt{V} + 2\cdot l^{3/2})}{l}\right)\cdot\left(O - \frac{2\cdot\sqrt{V}\cdot(\sqrt{V} - 2\cdot l^{3/2})}{l}\right) \ge 0\right]$

#27: bxh(l, O, V) := b(l, O, V)·h(l, O, V)

#28: bxh(5, 120, 80)

#29: 16

#30: $d(l, O, V) := \sqrt{(l^2 + b(l, O, V)^2 + h(l, O, V)^2)}$

#31: d(5, 120, 80)

#32: 8.39285

#33: $\alpha(l, O, V) := \mathrm{ASIN}\left(\frac{h(l, O, V)}{d(l, O, V)}\right)$

#34: α(5, 120, 80)

#35: 0.310832

#36: $\frac{0.310832\cdot 180}{\pi}$

#37: 17.8093

Ausdruck 1.3

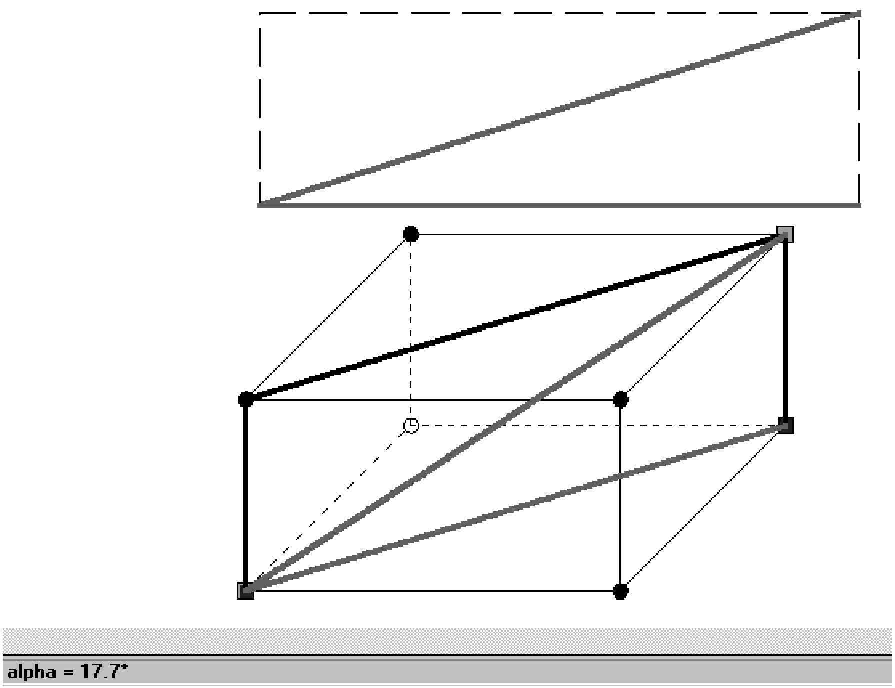

Abb. 6.1.4

Computernumerisches u. computeralgebraisches Lösen mit MATHEMATICA:

Zur Lösung der Quaderaufgabe benötigt man keine Hilfsvariablen, deshalb ist der Ansatz besonders einfach.

Ansatz: $l = 5$ (cm), $O = 120$ (cm²), $V = 80$ (cm³)

$O = 2\,(l \cdot b + b \cdot h + h \cdot l)$, $V = l \cdot b \cdot h$.

Es ist aufzulösen nach b, h.

In der MATHEMATICA-Notation sieht der Ansatz für die spezielle Berechnungsaufgabe mit ihrer (näherungsweisen) numerischen Lösung wie in Ausdruck 2.1 aus. Die exakte numerische Lösung zeigt der Ausdruck 2.2. Beide numerischen Lösungen fallen zusammen. Für eine zu kleine Oberfläche bekommt man als Lösung die leere Menge. (Ausdruck 2.3). Die Lösung der allgemeinen Berechnungsaufgabe ist in Ausdruck 2.4 zu sehen; im numerischen Ansatz sind nur die Wertzuweisungen weggelassen worden. MATHEMATICA vereinfacht automatisch den Radikanden, der für die Lösbarkeitsbedingung verwendet wird usw.

```
NLoese[{ l == 5, O == 120, V == 80,
         O == 2*(l*b + b*h + h*l), V == l*b*h},
        {b, h}]

{{b == 2.567, h == 6.233}, {b == 6.233, h == 2.567}}
```

Ausdruck 2.1 (Spezielle Berechnungsaufgabe: Näherungsweise numerische Lösung)

```
Loese[{ l == 5, O == 120, V == 80,
        O == 2*(l*b + b*h + h*l), V == l*b*h},
       {b, h}]
```

$$\left\{\left\{b == -\frac{2}{5}\left(-11+\sqrt{21}\right),\ h == \frac{2}{5}\left(11+\sqrt{21}\right)\right\},\ \left\{b == \frac{2}{5}\left(11+\sqrt{21}\right),\ h == -\frac{2}{5}\left(-11+\sqrt{21}\right)\right\}\right\}$$

Ausdruck 2.2 (Spezielle Berechnungsaufgabe: Exakte numerische Lösung)

```
NLoese[{ l == 5, O == 100, V == 80,
         O == 2*(l*b + b*h + h*l), V == l*b*h},
        {b, h}]

{}
```

Ausdruck 2.3 (Spezielle Berechnungsaufgabe ohne Lösung)

```
Loese[{O == 2 * (l * b + b * h + h * l), V == l * b * h},
      {b, h}]
```

$$\left\{\left\{b == -\frac{-l\,O+2\,V+\sqrt{(l\,O-2\,V)^2-16\,l^3\,V}}{4\,l^2},\right.\right.$$

$$\left.h == \frac{l\,O-2\,V+\sqrt{(l\,O-2\,V)^2-16\,l^3\,V}}{4\,l^2}\right\},$$

$$\left\{b == \frac{l\,O-2\,V+\sqrt{(l\,O-2\,V)^2-16\,l^3\,V}}{4\,l^2},\right.$$

$$\left.\left.h == -\frac{-l\,O+2\,V+\sqrt{(l\,O-2\,V)^2-16\,l^3\,V}}{4\,l^2}\right\}\right\}$$

Ausdruck 2.4 (Allgemeine Berechnungsaufgabe: Algebraische Lösung)

Aufgabe 2

In einen Quader (ABCDA'B'C'D') wird ein ebener Schnitt gelegt, der durch den Teilpunkt T auf AD, C und A' geht (Abb. 6.2.1, Planfigur). Wie groß ist das Schnittflächenparallelogramm, wenn a = 5 (cm), b = 6 (cm), c = 7 (cm) und AT/TD = q = 5/8?

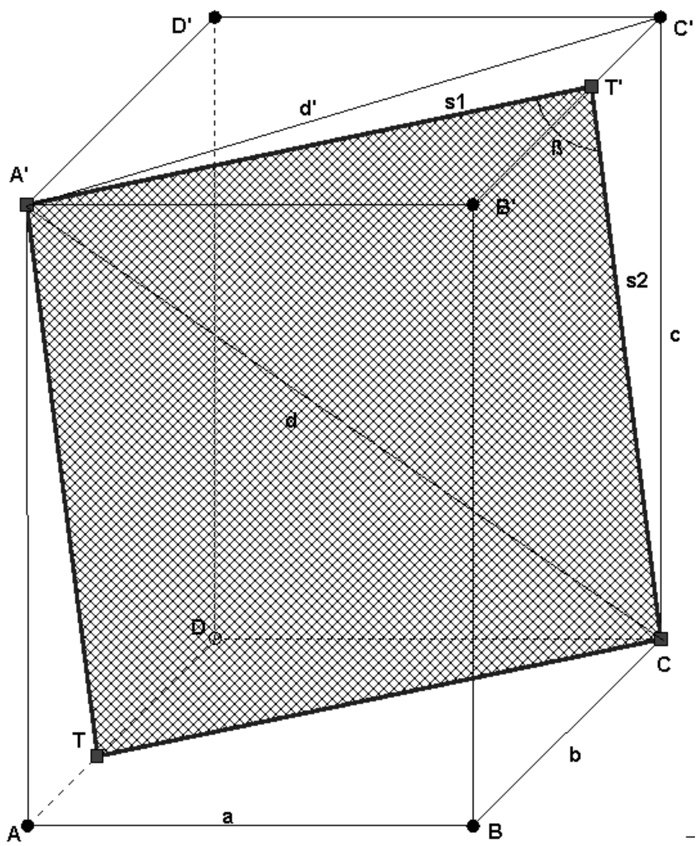

Abb. 6.2.1

Computergrafisches Lösen:

Wir verziehen in KÖRPERGEOMETRIE einen Quader bis er ungefähr die gegebenen Kantenlängen hat, dann erzeugen wir den Teilpunkt mit q = 5/8 ≈ 0,63 und die Schnittfläche und lassen den Quader so rotieren, bis die Schnittfläche ihre wahre Form zeigt (Abb. 6.2.2). Das Messergebnis für den Flächeninhalt beträgt ca. 45,2 (cm^2).

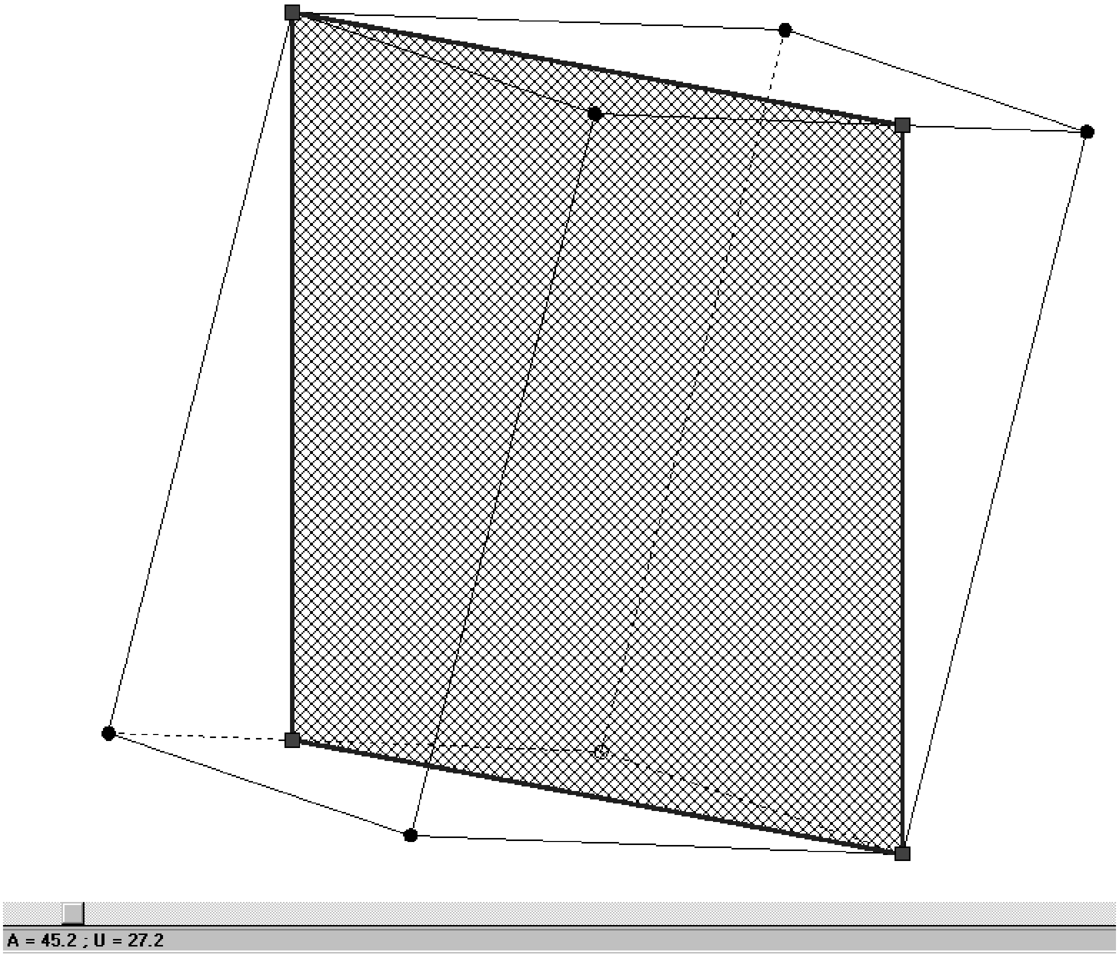

Abb. 6.2.2

Computernumerisches u. computeralgebraisches Lösen mit MATHEMATICA:

Im Gegensatz zu Aufgabe 1 benötigen wir hier Hilfsgrößen. Es ergibt sich folgender komplexer Ansatz mit Begründungen:

a = 5 (cm), b = 6 (cm), c = 7 (cm), q = 5/8

$a^2 + b^2 = d'^2$ (Satz des Pythagoras in $\Delta A'B'C'$)

$d^2 = d'^2 + c^2$ (Satz des Pythagoras in $\Delta CC'A'$)

$s_1^2 = TD^2 + a^2$ (Satz des Pythagoras in ΔCDT)

$s_2^2 = C'T'^2 + C^2$ (Satz des Pythagoras in $\Delta CC'T'$)

$q = \frac{AT}{TD}$, $AT + TD = b$, $C'T' = AT$ (Definition von q)

$d^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2s_1s_2 \cdot \cos(\beta)$ (Kosinussatz im $\Delta CT'A'$)

$A_s = s_1s_2 \sin(\beta)$ (Flächeninhalt des Parallelogramms)

$\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$ (Identität)

Aufzulösen nach A_s; dabei sind zu eliminieren:

d', d, s_1, s_2, AT, TD, C'T', β bzw. $\sin(\beta)$, $\cos(\beta)$.

Das numerische Auflösen des komplexen Ansatzes, den der Leser leicht nachvollziehen kann, hat als Ergebnis die gerundete numerische Lösung (Ausdruck 3.1) und die exakte numerische Lösung (Ausdruck 3.2).

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{NLoese}\Big[\Big\{a == 5,\ b == 6,\ c == 7,\ q == \frac{5}{8},\\
&\quad a^2 + b^2 == d'^2,\\
&\quad d^2 == d'^2 + c^2,\\
&\quad s_1^2 == TD^2 + a^2,\\
&\quad s_2^2 == C'T'^2 + c^2,\\
&\quad \frac{AT}{TD} == q,\ AT + TD == b,\ C'T' == AT,\\
&\quad d^2 == s_1^2 + s_2^2 - 2\, s_1\, s_2\, \mathrm{Cos}[\beta],\\
&\quad A_s == s_1\, s_2\, \mathrm{Sin}[\beta],\\
&\quad \mathrm{Sin}[\beta]^2 + \mathrm{Cos}[\beta]^2 == 1\Big\},\\
&\quad \{A_s\},\\
&\quad \{d',\ d,\ s_1,\ s_2,\ AT,\ TD,\ C'T',\ \mathrm{Sin}[\beta],\ \mathrm{Cos}[\beta]\}\Big]
\end{aligned}
$$

$\{\{A_s == -45.0129\}, \{A_s == 45.0129\}\}$

Ausdruck 3.1 (Speziellen Berechnungsaufgabe: Näherungslösung)

Die Lösung der zugehörigen allgemeinen Berechnungsaufgabe ist dem Ausdruck 3.3 zu entnehmen. Jeweils entfällt die negative Lösung. Für positives a, b, c, q gibt es immer nur eine Lösung. Natürlich kann diese Aufgabe auch mit der Substitutionsmethode mittels DERIVE gelöst werden (Aufgabe für den Leser).

```
Loese[{ a == 5, b == 6, c == 7, q == 5/8,
        a^2 + b^2 == d'^2,
        d^2 == d'^2 + c^2,
        s1^2 == TD^2 + a^2,
        s2^2 == C'T'^2 + c^2,
        AT/TD == q, AT + TD == b, C'T' == AT,
        d^2 == s1^2 + s2^2 - 2 s1 s2 Cos[β],
        As == s1 s2 Sin[β],
        Sin[β]^2 + Cos[β]^2 == 1},
       {As},
       {d', d, s1, s2, AT, TD, CT, Sin[β], Cos[β]}]
```

$$\left\{\left\{A_s == -\frac{1}{13}\sqrt{342421}\right\}, \left\{A_s == \frac{1}{13}\sqrt{342421}\right\}\right\}$$

Ausdruck 3.2 (Speziellen Berechnungsaufgabe: Exakte Lösung)

```
Loese[{ a^2 + b^2 == d'^2,
        d^2 == d'^2 + c^2,
        s1^2 == TD^2 + a^2,
        s2^2 == C'T'^2 + c^2,
        AT/TD == q, AT + TD == b, C'T' == AT,
        d^2 == s1^2 + s2^2 - 2 s1 s2 Cos[β],
        As == s1 s2 Sin[β],
        Sin[β]^2 + Cos[β]^2 == 1},
       {As},
       {d', d, s1, s2, AT, TD, CT, Sin[β], Cos[β]}]
```

$$\left\{\left\{A_s == -\frac{\sqrt{b^2 c^2 + a^2 (b^2 q^2 + c^2 (1+q)^2)}}{\sqrt{(1+q)^2}}\right\}, \left\{A_s == \frac{\sqrt{b^2 c^2 + a^2 (b^2 q^2 + c^2 (1+q)^2)}}{\sqrt{(1+q)^2}}\right\}\right\}$$

Ausdruck 3.3 (Allgemeinen Berechnungsaufgabe: Algebraische Lösung)

Bei Verwendung der Vektorrechnung ist das Lösen dieser Aufgabe einfacher, aber in Klasse 10 verfügen wir noch nicht über das entsprechende mathematische Werkzeug.

Aufgabe 3

Gegeben sind von einer quadratischen Pyramide ihr Volumen (50 cm^3) und ihre Oberfläche (100 cm^2). Gesucht sind die Größe der Grundkante (a) und die Größe der Höhe (h).

Computergrafisches Lösen:

Durch Verändern der quadratischen Pyramide in KÖRPERGEOMETRIE gewinnen wir eine Pyramide, die in etwa das gegebene Volumen und die gegebene Oberfläche hat (Abb. 6.3.1).

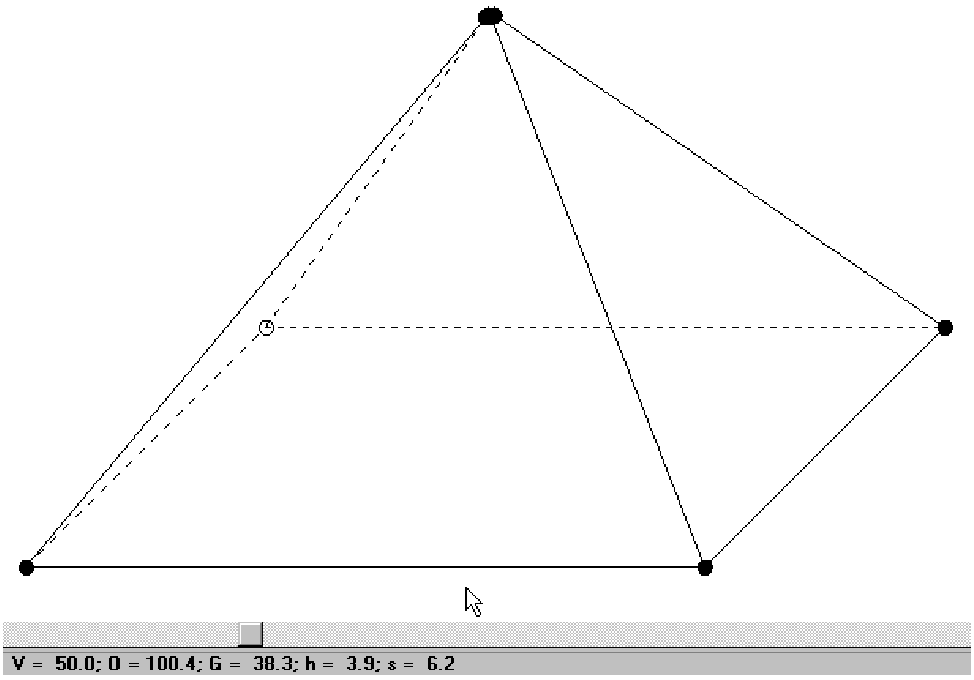

Abb. 6.3.1

Computernumerisches u. computeralgebraisches Lösen mit MATHEMATICA:

Wir erhalten unter Verwendung der Bezeichnungen der Planfigur (Abb. 6.3.2) folgenden Ansatz:

$V = 50\ (cm^3),\ O = 100\ (cm^2)$

$V = \frac{1}{3}\, G \cdot h$ (Volumenformel Pyramide)

$O = G + M$ (Oberflächenformel Pyramide)

$G = a^2$ (Flächeninhaltsformel Quadrat)

$M = 4 \cdot D$ (Flächeninhaltsformel Mantel)

$D = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_D$ (Flächeninhaltsformel Dreieck)

$h_D^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$ (Satz des Pythagoras)

Auflösen nach a, h; eliminieren: G, M, D, h_D.

Der Ansatz aus den sechs Gleichungen, die Wertzuweisungen zählen nicht als Gleichungen, ist vollständig. (Warum?)

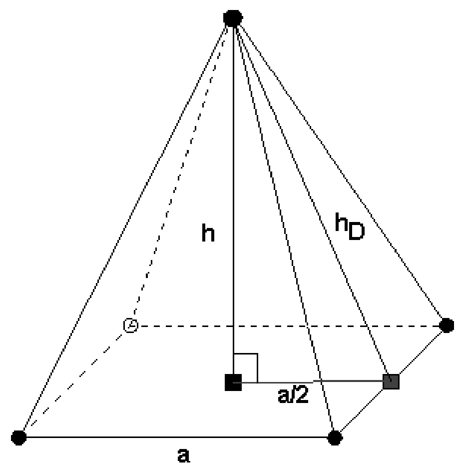

Abb. 6.3.2

Der top-down-strukturierte Ansatz lässt sich „eins zu eins“ in MATHEMATICA implementieren.

Wir erhalten zwei verschiedene Lösungen, d.h. zwei verschiedene Pyramiden: eine breite u. niedrige und eine schmälere u. höhere (Ausdruck 4.1). Beim computergrafischen Lösen haben wir nur eine der Pyramiden gefunden. Wir machen die Probe, indem wir gegebene mit zu bestimmenden Größen vertauschen (Ausdruck 4.2, für nur eine Lösung).

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{NLoesePositiv}\Big[\{V == 50,\ O == 100,\\
&\qquad V == \frac{1}{3}\,G\,h,\\
&\qquad O == G + M,\\
&\qquad G == a^2,\\
&\qquad M == 4\,D,\\
&\qquad D == \frac{a}{2}\,h_D,\\
&\qquad h_D^2 == \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2\},\\
&\qquad \{a, h\},\\
&\qquad \{G, M, D, h_D\}\Big]
\end{aligned}
$$

{{h == 3.92375, a == 6.18294}, {h == 12.7429, a == 3.43092}}

Ausdruck 4.1 (Spezielle Berechnungsaufgabe: Näherungslösung)

```
NLoesePositiv[{h == 3.92375, a == 6.18294,
               V == 1/3 G h,
               O == G + M,
               G == a^2,
               M == 4 D,
               D == a/2 hD,
               hD^2 == (a/2)^2 + h^2},
              {V, O},
              {G, M, D, hD}]

{V == 50.0000, O == 100.000}
```

$$V == \frac{1}{3} G\, h, \quad D == \frac{a}{2} h_D, \quad h_D^2 == \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

Ausdruck 4.2 (Spezielle Berechnungsaufgabe: Lösungskontrolle durch Umkehrung)

Wie nun z.B. das Volumen verändern, um nur eine Pyramide zu bekommen? Ein zu großes Volumen führt zu keiner Lösung (Ausdruck 4.3), da dann die Oberfläche zu klein ist.

```
NLoesePositiv[{V == 60, O == 100,
               V == 1/3 G h,
               O == G + M,
               G == a^2,
               M == 4 D,
               D == a/2 hD,
               hD^2 == (a/2)^2 + h^2},
              {a, h},
              {G, M, D, hD}]

{}
```

Ausdruck 4.3 (Spezielle Berechnungsaufgabe mit Variation von V ohne Lösung)

Durch systematisches Probieren vergrößern wir das Volumen solange bis die beiden numerischen Lösungen zusammenfallen (Ausdruck 4.4/5).

```
NLoesePositiv[{V == 55, O == 100,
               V == 1/3 G h,
               O == G + M,
               G == a^2,
               M == 4 D,
               D == a/2 hD,
               hD^2 == (a/2)^2 + h^2},
              {a, h},
              {G, M, D, hD}]

{{h == 4.85692, a == 5.82857}, {h == 10.2946, a == 4.00348}}
```

Ausdruck 4.4 (Spezielle Berechnungsaufgabe mit Variation von V)

```
NLoesePositiv[{V == 58.92556509888, O == 100,
```
$$V == \frac{1}{3} G\, h,$$
$$O == G + M,$$
$$G == a^2,$$
$$M == 4\, D,$$
$$D == \frac{a}{2} h_D,$$
$$h_D^2 == \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2\},$$
```
              {a, h},
              {G, M, D, hD}]

{{h == 7.07107, a == 5.}, {h == 7.07107, a == 5.}}
```

Ausdruck 4.5 (Spezielle Berechnungsaufgabe mit zusammenfallender Lösung)

Es stellt sich folgende allgemeine Berechnungsaufgabe: Welchen Bedingungen (Lösbarkeitsbedingungen) müssen Volumen und Oberflächengröße einer quadratischen Pyramide genügen, damit es genau eine, keine oder zwei entsprechende Pyramiden gibt? Um diese Frage zu beantworten, verallgemeinern wir den Ansatz von Ausdruck 4.2, indem wir einfach die Wertzuordnungen für V und O weglassen (Ausdruck 4.3). Wir erhalten vier Paare von Lösungsformeln für a und h.
(MATHEMATICA kann dem naiven Benutzer nicht erklären, warum es genau vier Lösungen gibt. Das wäre eine Motivation, die spezielle bzw. allgemeine Aufgabe traditionell händisch oder mit der Substitutionsmethode mittels DERIVE zu lösen; man erhält eine zu einer quadratischen Gleichung reduzierbare biquadratische Gleichung.) Davon entfallen die erste und die dritte Lösung, da in ihnen jeweils a negativ ist und im Aufgabenkontext nur positive Lösungen zulässig sind. Aus den anderen in Frage kommenden Lösungen bestimmen wir nun die Lösbarkeitsbedingungen.

```
Loese[{V == 1/3 G h,
       O == G + M,
       G == a^2,
       M == 4 D,
       D == a/2 hD,
       hD^2 == (a/2)^2 + h^2},
      {a, h},
      {G, M, D, hD}]
```

$$\left\{\left\{h == \frac{O^2 - \sqrt{O^4 - 288\,O\,V^2}}{24\,V},\; a == -\frac{\sqrt{O^2 + \sqrt{O^4 - 288\,O\,V^2}}}{2\sqrt{O}}\right\},\right.$$

$$\left\{h == \frac{O^2 - \sqrt{O^4 - 288\,O\,V^2}}{24\,V},\; a == \frac{\sqrt{O^2 + \sqrt{O^4 - 288\,O\,V^2}}}{2\sqrt{O}}\right\},$$

$$\left\{h == \frac{O^2 + \sqrt{O^4 - 288\,O\,V^2}}{24\,V},\; a == -\frac{\sqrt{O^2 - \sqrt{O^4 - 288\,O\,V^2}}}{2\sqrt{O}}\right\},$$

$$\left.\left\{h == \frac{O^2 + \sqrt{O^4 - 288\,O\,V^2}}{24\,V},\; a == \frac{\sqrt{O^2 - \sqrt{O^4 - 288\,O\,V^2}}}{2\sqrt{O}}\right\}\right\}$$

Ausdruck 4.6 (Allgemeine Berechnungsaufgabe: Algebraische Lösung)

Es sind generell zwei Arten von Lösbarkeitsbedingungen zu unterscheiden: Bedingungen, die sicherstellen, dass überhaupt reelle Lösungen existieren und kontextgebundene Lösbarkeitsbedingungen, die in unserem Beispiel die Positivität der Lösung garantieren.

Für reelle Lösungen müssen die Radikanden der Quadratwurzeln größer gleich Null sein, was auf die Bedingung $O^4 - 288\,OV^2 \geq 0$ führt, die hier nicht weiter vereinfacht werden soll. Jetzt können wir den exakten Volumenwert bestimmen, für den es bei $O = 100$ (cm²) genau eine Pyramide gibt. Für die positiven reellen Lösungen muß $O^2 - (O^4 - 288\,OV^2)^{1/2} > 0$ sein, was einfach aus $288\,OV^2 > 0$ geschlossen werden kann.

Im Rahmen eines Projekts in Klasse 9 können alle Aufgaben über die quadratische Pyramide aufgestellt und systematisiert werden (offene Aufgabe!). Die Tabelle zeigt eine solche Aufgabenübersicht. Mittels computeralgebraischen Lösungsmethoden sind die allgemeinen Berechnungsaufgaben zu lösen und die Lösbarkeitsbedingungen anzugeben und zu diskutieren. Welche der Aufgaben lassen sich besser mit MATHEMATICA oder welche besser mit DERIVE lösen? Zu welcher Aufgabenvariation kann man entsprechende Ansätze variieren? Usw.

Größen / Aufgaben	a	h	s	h_D	O	V	...
1	geg.	geg.	?	?	?	?	
2	geg.	?	geg.	?	?	?	
3	geg.	?	?	geg.	?	?	
4	geg.	?	?	?	geg.	?	
5	geg.	?	?	?	?	geg.	
6	?	geg.	geg.	?	?	?	
7	?	geg.	?	geg.	?	?	
8	?	geg.	?	?	geg.	?	
9	?	geg.	?	?	?	geg.	
10	?	?	geg.	geg.	?	?	
11	?	?	geg.	?	geg.	?	
12	?	?	geg.	?	?	geg.	
13	?	?	?	geg.	geg.	?	
14	?	?	?	geg.	?	geg.	
15	?	?	?	?	geg.	geg.	
...							

Tabelle (Systematische Variation von Berechnungsaufgaben)

Aufgabe 4

Von einem Kegel sind das Volumen (V = 100 cm^3) und der Radius der Grundfläche (r = 3,5 cm) bekannt. Wie groß ist seine Oberfläche?

Computergrafisches Lösen:

In KÖRPERGEOMETRIE verziehen wir die Spitze und einen Grundflächenpunkt eines Kegels so, dass er ungefähr den gegebenen Volumenwert und den Wert des

Radius annimmt (Abb. 6.4). Wir lesen u.a. die für die Größe der Oberfläche 131.9 (cm^2) ab.

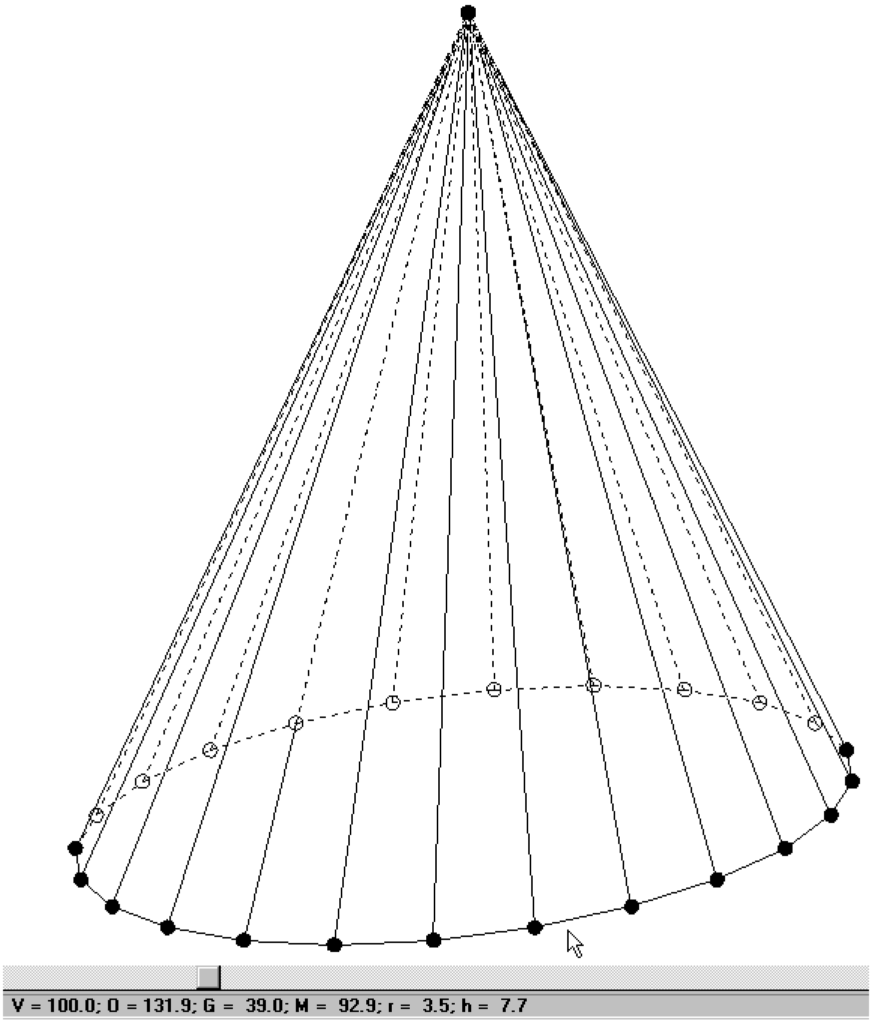

Abb. 6.4

Computernumerisches u. computeralgebraisches Lösen mit DERIVE:

Zu substituierende Variablen wurden mit „:="zu globalen Variablen erklärt (Ausdruck 5.1, Zeile 6/10), um mit „Vereinfachen" ihr automatisches Ersetzen durchzuführen. Die Lösungsformel für O wird als Berechnungsmakro in Abhängigkeit von V und r definiert (Zeile 14); Ersetzung von V und r durch die gegebenen Werte liefert u.a. die

gerundete Lösung für O (Zeile 16). Es gibt für jedes positive Wertepaar V,r eine Lösung.

#1: $O = G + M$

#2: $G := \pi \cdot r^2$

#3: $M := \pi \cdot r \cdot s$

#4: $s^2 = h^2 + r^2$

#5: $s = \sqrt{(h^2 + r^2)}$

#6: $s := \sqrt{(h^2 + r^2)}$

#7: $O = \pi \cdot r \cdot \sqrt{(h^2 + r^2)} + \pi \cdot r^2$

#8: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

#9: $h = \frac{3 \cdot V}{\pi \cdot r^2}$

#10: $h := \frac{3 \cdot V}{\pi \cdot r^2}$

#11: $O = \frac{\sqrt{(9 \cdot V^2 + \pi^2 \cdot r^6)}}{r} + \pi \cdot r^2$

#12: $O = \frac{\sqrt{(9 \cdot 155^2 + \pi^2 \cdot 4.5^6)}}{4.5} + \pi \cdot 4.5^2$

#13: $O = 184.963$

#14: $O(V, r) := \frac{\sqrt{(9 \cdot V^2 + \pi^2 \cdot r^6)}}{r} + \pi \cdot r^2$

#15: $O(155, 4.5)$

#16: 184.963

Ausdruck 5.1

Der Ausdruck 5.2 zeigt den sich selbst erklärenden Lösungsweg mit den entsprechenden Wortvariablen.

$$\#1:\quad \text{Oberfläche} = \text{Grundfläche} + \text{Mantel}$$

$$\#2:\quad \text{Grundfläche} := \pi \cdot \text{Radius}^2$$

$$\#3:\quad \text{Mantel} := \pi \cdot \text{Radius} \cdot \text{Mantellinie}$$

$$\#4:\quad \text{Mantellinie}^2 = \text{Höhe}^2 + \text{Radius}^2$$

$$\#5:\quad \text{Mantellinie} = \sqrt{(\text{Höhe}^2 + \text{Radius}^2)}$$

$$\#6:\quad \text{Mantellinie} := \sqrt{(\text{Höhe}^2 + \text{Radius}^2)}$$

$$\#7:\quad \text{Oberfläche} = \pi \cdot \text{Radius} \cdot \sqrt{(\text{Höhe}^2 + \text{Radius}^2)} + \pi \cdot \text{Radius}^2$$

$$\#8:\quad \text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \text{Radius}^2 \cdot \text{Höhe}$$

$$\#9:\quad \text{Höhe} = \frac{3 \cdot \text{Volumen}}{\pi \cdot \text{Radius}^2}$$

$$\#10:\quad \text{Höhe} := \frac{3 \cdot \text{Volumen}}{\pi \cdot \text{Radius}^2}$$

$$\#11:\quad \text{Oberfläche} = \frac{\sqrt{(\pi^2 \cdot \text{Radius}^6 + 9 \cdot \text{Volumen}^2)} + \pi \cdot \text{Radius}^3}{\text{Radius}}$$

$$\#12:\quad \text{Oberfläche} = \frac{\sqrt{(\pi^2 \cdot 4.5^6 + 9 \cdot 155^2)} + \pi \cdot 4.5^3}{4.5}$$

$$\#13:\quad \text{Oberfläche} = 184.963$$

$$\#14:\quad \text{Oberfläche}(\text{Volumen}, \text{Radius}) := \frac{\sqrt{(\pi^2 \cdot \text{Radius}^6 + 9 \cdot \text{Volumen}^2)} + \pi \cdot \text{Radius}^3}{\text{Radius}}$$

$$\#15:\quad \text{Oberfläche}(155, 4.5)$$

$$\#16:\quad 184.963$$

Ausdruck 5.2

Computernumerisches u. computeralgebraisches Lösen mit MATHEMATICA:

Um den Ansatz komfortabel top-down zu formulieren, verwenden wir die Hilfsgrößen G, M, s und h. Die näherungsweise numerische Lösung zeigt der Ausdruck 6.1. Im Ausdruck 6.2 sind auch die Hilfsvariablen zu Variablen gemacht worden, nach denen aufzulösen ist; wir erhalten somit alle Zwischenergebnisse der speziellen Berechnungsaufgabe.

```
NLoesePositiv[{V == 100, r == 3.5,
               O == G + M,
               G == π * r^2,
               M == π * r * s,
               V == 1/3 * π * r^2 * h,
               s^2 == h^2 + r^2},
              {O},
              {G, M, s, h}]

O == 132.442
```

Ausdruck 6.1 (Spezielle Berechnungsaufgabe: Näherungslösung)

```
NLoesePositiv[{V == 100, r == 3.5,
               O == G + M,
               G == π * r^2,
               M == π * r * s,
               V == 1/3 * π * r^2 * h,
               s^2 == h^2 + r^2},
              {O, G, M, s, h}]

{O == 132.442, G == 38.4845, M == 93.9574, s == 8.54502, h == 7.79534}
```

Ausdruck 6.2 (Spezielle Berechnungsaufgabe: Näherungslösung mit Zwischenergebnissen)

Im Ausdruck 6.3 finden wir den allgemeinen Ansatz mit seinen Lösungen; die erste Lösung entfällt für die Aufgabenstellung, da sich aus ihr $0 \geq 9V^2$ ergäbe. Das sehen wir auch, wenn wir alle Zwischenergebnisse ausgeben lassen (Ausdruck 6.4), dann erhalten wir nämlich eine negative Größe für den Mantel.

```
Loese[{ O == G + M,
        G == π * r^2,
        M == π * r * s,
        V == 1/3 * π * r^2 * h,
        s^2 == h^2 + r^2},
      {O},
      {G, M, s, h}]
```

$$\left\{O == \pi r^2 - \frac{\sqrt{\pi^2 r^6 + 9 V^2}}{r},\ O == \frac{\pi r^3 + \sqrt{\pi^2 r^6 + 9 V^2}}{r}\right\}$$

Ausdruck 6.3 (Allgemeine Berechnungsaufgabe: Algebraische Lösung)

```
Loese[{ O == G + M,
        G == π * r^2,
        M == π * r * s,
        V == 1 / 3 * π * r^2 * h,
        s^2 == h^2 + r^2},
        {O, G, M, s, h}]
```

$$\left\{\left\{O == r\left(\pi r - \sqrt{\pi^2 r^2 + \frac{9 V^2}{r^4}}\right), G == \pi r^2, M == -r\sqrt{\pi^2 r^2 + \frac{9 V^2}{r^4}},\right.\right.$$

$$s == -\sqrt{r^2 + \frac{9 V^2}{\pi^2 r^4}}, h == \frac{3 V}{\pi r^2}\right\}, \left\{O == r\left(\pi r + \sqrt{\pi^2 r^2 + \frac{9 V^2}{r^4}}\right), G == \pi r^2,$$

$$\left.\left. M == r\sqrt{\pi^2 r^2 + \frac{9 V^2}{r^4}}, s == \sqrt{r^2 + \frac{9 V^2}{\pi^2 r^4}}, h == \frac{3 V}{\pi r^2}\right\}\right\}$$

Ausdruck 6.4 (Allgemeine Berechnungsaufgabe: Algebraische Lösung mit Zwischenergebnissen)

Den allgemeinen Ansatz kann man nun variieren, indem z.B. O und V als gegeben und r als gesucht (Ausdruck 6.5) oder O und r als gegeben und V als gesucht (Ausdruck 6.6) angesehen werden. (Der Leser möge selbst die Lösbarkeitsbedingungen untersuchen.)

```
Loese[{ O == G + M,
        G == π * r^2,
        M == π * r * s,
        V == 1 / 3 * π * r^2 * h,
        s^2 == h^2 + r^2},
       {r},
       {G, M, s, h}]
```

$$\left\{r == -\frac{\sqrt{O - \frac{\sqrt{O^3 - 72 \pi V^2}}{\sqrt{O}}}}{2\sqrt{\pi}}, r == \frac{\sqrt{O - \frac{\sqrt{O^3 - 72 \pi V^2}}{\sqrt{O}}}}{2\sqrt{\pi}}, r == -\frac{\sqrt{O + \frac{\sqrt{O^3 - 72 \pi V^2}}{\sqrt{O}}}}{2\sqrt{\pi}},\right.$$

$$\left. r == \frac{\sqrt{O + \frac{\sqrt{O^3 - 72 \pi V^2}}{\sqrt{O}}}}{2\sqrt{\pi}}\right\}$$

Ausdruck 6.5 (Allgemeine Berechnungsaufgabe mit Ansatzvariation: Algebraische Lösung)

```
Loese[{ 0 == G + M,
        G == π * r^2,
        M == π * r * s,
        V == 1 / 3 * π * r^2 * h,
        s^2 == h^2 + r^2},
       {V},
       {G, M, s, h}]
```

$$\left\{V == -\frac{1}{3}\sqrt{0\,r^2\,(0-2\pi r^2)},\ V == \frac{1}{3}\sqrt{0\,r^2\,(0-2\pi r^2)}\right\}$$

Ausdruck 6.6 (Allgemeine Berechnungsaufgabe mit Ansatzvariation: Algebraische Lösung)

Aufgabe 5

Von einem aus Zylinder und Kegel zusammengesetzten Körper (Abb. 6.5, Planfigur) sind gegeben der Grundkreisradius (r), die Zylinderhöhe (h_Z) und die Mantellinie (s) des Kegels. Zu berechnen sind die Oberfläche und das Volumen des gesamten Körpers.

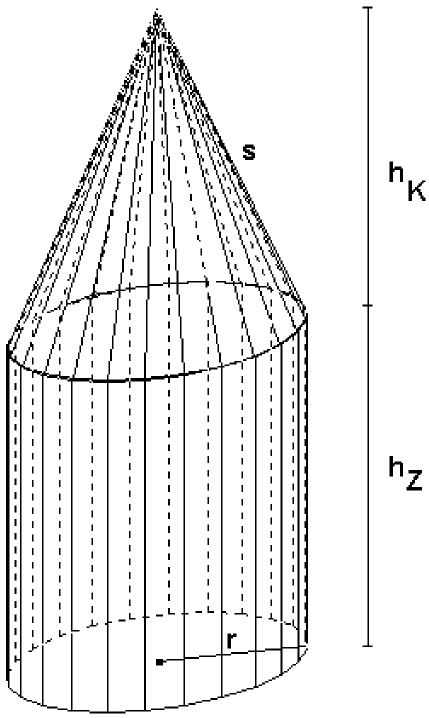

Abb. 6.5

Computeralgebraisches Lösen mit DERIVE:

Die Substitution der entsprechenden Hilfsgrößen in der Oberflächen- und der Volumenformel führt zur Definition der Berechnungsmakros für O und V in Abhängigkeit von r, s und h_Z (Ausdruck 7, Zeile 15/16). Als anschauliche Lösbarkeitsbedingung ergibt sich für die Volumenbestimmung s > r, wenn wir den „platten“ Kegel ausschließen.

$$\#1:\quad O = G + MZ + MK$$

$$\#2:\quad V = VZ + VK$$

$$\#3:\quad G := \pi\cdot r^2$$

$$\#4:\quad MZ := 2\cdot\pi\cdot r\cdot hZ$$

$$\#5:\quad MK := \pi\cdot r\cdot s$$

$$\#6:\quad VZ := G\cdot hZ$$

$$\#7:\quad VK := \frac{1}{3}\cdot G\cdot hK$$

$$\#8:\quad s^2 = r^2 + hK^2$$

$$\#9:\quad \left[hK = \sqrt{(s^2 - r^2)},\ hK = -\sqrt{(s^2 - r^2)}\right]$$

$$\#10:\quad hK := \sqrt{(s^2 - r^2)}$$

$$\#11:\quad O = 2\cdot\pi\cdot hZ\cdot r + \pi\cdot r^2 + \pi\cdot r\cdot s$$

$$\#12:\quad O = \pi\cdot r\cdot(2\cdot hZ + s + r)$$

$$\#13:\quad V = \frac{\pi\cdot r^2\cdot\sqrt{(s^2 - r^2)}}{3} + \pi\cdot hZ\cdot r^2$$

$$\#14:\quad V = \frac{\pi\cdot r^2\cdot(\sqrt{(s^2 - r^2)} + 3\cdot hZ)}{3}$$

$$\#15:\quad O(r,\ s,\ hZ) := \pi\cdot r\cdot(2\cdot hZ + s + r)$$

$$\#16:\quad V(r,\ s,\ hZ) := \frac{\pi\cdot r^2\cdot(\sqrt{(s^2 - r^2)} + 3\cdot hZ)}{3}$$

Ausdruck 7

Computeralgebraisches Lösen mit MATHEMATICA:

Wir entwickeln den Ansatz schrittweise verfeinernd von der O- und V-Formel aus (Ausdruck 8). Außer der Positivität der gegebenen Größen, gibt es keine weiteren Lösbarkeitsbedingungen.

```
Loese[{O == G + MZ + MK,
       V==VZ+VK,
       G == π * r^2, MZ == 2 * π * r * hZ, MK == π * r * s,
       VZ == G * hZ, VK == 1/3 * G * hK,
        s^2 == r^2 * hK},
      {O, V},
      {G, MZ, MK, VZ, VK, hK}]
```

$$\left\{O == \pi\, r\,(r+s+2\,h_Z),\ V == \frac{1}{3}\,\pi\,(s^2+3\,r^2\,h_Z)\right\}$$

Ausdruck 8 (Allgemeine Berechnungsaufgabe: Algebraische Lösung)

6.3 Schlußbemerkungen

Bemerkung 1:
Ideal wäre ein Computerwerkzeug, mit dem man sowohl den grafischen Lösungsmodus als auch die anderen Lösungsmodi kompatibel ausführen könnte, ohne zwischen ganz verschiedenen Benutzungsoberflächen zu wechseln, was trotz Multitasking bei naiven Usern Probleme mit sich bringen kann. Hier besteht als noch ein entsprechender Software-Entwicklungsbedarf.

Bemerkung 2:
Die oben konkretisierte Konzeption einer computerunterstützten Gesamtbehandlung von (raum-)geometrischen Berechnungsaufgaben ist ein Beispiel dafür, wie durch ein Medium nicht nur ein Methodenwandel, sondern auch eine Änderung von Zielen und Themen hervorgerufen werden könnte. Wir sind aber der konservativen Meinung, daß es für's erste genügt, neue Methoden und Ziele an traditionellen, ausreichend komplexen Aufgaben zu realisieren.

Bemerkung 3:
Die vorstehende Konzeption des computerunterstützten geometrischen Berechnens versteht sich als eine antithetische Setzung zur bisherigen Behandlung (raum-) geometrischer Berechnungsaufgaben. Die Zukunft wird zeigen, wie sich – trotz der Verfremdungen gegenüber dem händischen Lösungsstandard – eine Synthese aus traditionellem und computerisiertem Berechnen herausbilden wird.

Bemerkung 4:

Eine Möglichkeit, von den vorstehenden computerunterstützten Berechnungsmethoden zur händischen Berechnung überzugehen, besteht in der Analyse der computergenerierten Ergebnisse gemäß der Frage: Wie lautet die Gleichung, die zu zwei, drei, vier Lösungen führt?

6.4 Literatur

Bauer, H., Freiberger, U., Kühlewind, G., Schumann, H. (1998) : KÖRPER (Software mit Manual). Augsburg: Zentralstelle für Computer im Unterricht

Bauer, H.: Freiberger, U.; Kühlewind, G., Schumann, H. (1999): KÖRPERGEOMETRIE (Software mit Manual). Berlin: Cornelsen,

Dörfler, W. (1991): Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. In: Dörfler, W. et al. (Hrsg.): Computer-Mensch-Mathematik. Beiträge zum 6. Internationalen Symposion für „Didaktik der Mathematik“. Stuttgart: B.G. Teubner, S.51 - 75

Gloor, O. / Schumann, H. (1996): MATHEMATICA-Package für das schulalgebraische Lösen in der Sekundarstufe I. ETH Zürich / PH Weingarten

Polya, G. (1944): How to solve it. Princeton: University Press

Rich, A. et al. (1990): Handbuch DERIVE. Hagenberg: Soft Warehouse Europe

Schumann, H. (1994): Ansatzorientiertes Lösen komplexer Algebra-Aufgaben mit Computeralgebra In: MNU(47), Heft 8, S. 495 - 502

Schumann, H. (1995a): Ansatzorientiertes Lösen komplexer Algebra-Aufgaben mit Computeralgebra. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1995. Hildesheim: Franzbecker, S. 420 - 423

Schumann, H. (1995b): The use of computer algebra in the formulaic solution of complex algebraic problems. In: Pythagoras (38), December, p. 32 - 35.

Schumann, H. (1995c): The use of computer algebra in the formulaic solution of complex algebraic problems: the case of geometric calculation. In: Mammana, C. (Ed.): ICMI Study – Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. – International Commission on Mathematical Instruction, Cambridge (UK), p. 235 - 241.

Schumann, H. (1996): The use of computer algebra in the formulaic solving of complex algebraic problems.
In: International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (28), No. 2, p. 269 - 287

Schumann, H. (1997a): News Standards for the Solution of Geometric Calculation Problems by Using Computers. In: International Reviews on Mathematical Education (ZDM), Vol. 29, No. 5, p. 155 - 161.

Schumann, H. (1997b): Abschlussprüfungen an Realschulen: Das Lösen der Mathematikaufgaben mit DERIVE. In: Beiträge zum Computereinsatz in der Schule (11), Heft 2, S.1 - 43

Wolfram, S. (1988/1996) Mathematica – A System for Doing Mathematics by Computer. Redwood City, CA: Addison-Wesley