Monika Christl

Kugelgeometrie mit dem Computer

Im Bereich der ebenen Geometrie ist die Entwicklung von Computerprogrammen und die didaktische Diskussion zur Integration des Computers in den Unterricht weit fortgeschritten. Im Gegensatz dazu steht die Entwicklung von Computerprogrammen zur Raumgeometrie und insbesondere zur Kugelgeometrie und deren didaktische Diskussion erst am Anfang, obwohl hier der Einsatz des Computers noch größere Möglichkeiten als in der ebenen Geometrie bietet. Der vorliegende Aufsatz möchte zum computerintegrierenden Unterricht zur Kugelgeometrie einen Beitrag liefern.

Im Folgenden wird zunächst ein Überblick über die Entwicklung der Kugelgeometrie in der Schule und der Computerwerkzeuge zur Kugelgeometrie gegeben. Anschließend wird ein computerintegrierender Lehrgang zur Kugelgeometrie vorgestellt, in dem im Vergleich zu traditionellen Lehrgängen neue Schwerpunkte gesetzt und neue Inhalte aufgenommen wurden. Die Auswirkungen des Computereinsatzes im Rahmen dieses Lehrgangs wurden in einer quantitativen, vergleichenden Studie mit 304 Schülern untersucht. Eine Auswahl der Ergebnisse wird im sechsten Abschnitt dargestellt.

1. Kugelgeometrie in der Schule

In Deutschland war die Kugelgeometrie oder sphärische Trigonometrie seit dem Ende des 18. Jahrhunderts Unterrichtsstoff an Gymnasien und höheren Bürgerschulen. Inhalte des Unterrichts waren dabei üblicherweise Klein- und Großkreise, die Fläche eines Kugeldreiecks und Berechnungen an rechtwinkligen und allgemeinen Kugeldreiecken. Darüber hinaus nahmen Anwendungen der sphärischen Trigonometrie auf die Geodäsie, die Astronomie, die mathematische Geographie, die Gnomonik und die Stereometrie einen großen Stellenwert ein.

In den 50er Jahren unseres Jahrhunderts fielen zunächst die zeichnenden Verfahren der Kugelgeometrie, für die Kenntnisse aus dem Bereich der darstellenden Geometrie notwendig sind, Neuerungsbestrebungen zum Opfer. In den 60er Jahren verschwand die Kugelgeometrie dann vollständig aus den Lehrplänen der Gymnasien. Die Begriffssprache der Mengenlehre, der mathematische Abbildungsbegriff und die Vektorrechnung fanden zu dieser Zeit, auch auf Kosten der Kugelgeometrie, Eingang in die Schule. Ein weiterer Grund für das Verschwinden der Kugelgeometrie aus dem Lehrplan des Gymnasiums war der aus der Unhandlichkeit von Rechenstab und Logarithmentafel resultierende große Zeitaufwand für Berechnungen.

In den 80er Jahren gewann die anwendungsorientierte Mathematik in der Schule wieder an Bedeutung, wodurch der Boden für die Wiedereinführung der Kugelgeometrie bereitet war. Mit der Einführung des Taschenrechners in den Schulen wurde die sphärische Geometrie wieder neu entdeckt.

Heute findet man in einigen Bundesländern die Kugelgeometrie im Lehrplan des Gymnasiums. In Bayern ist sie für die 11. Klasse am mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium Wahlpflichtgebiet. Für die sphärische Trigonometrie I und II sind hier jeweils 28 Unterrichtsstunden vorgesehen. Im Saarland findet man die Kugelgeometrie im Lehrplan der 10. Klasse des Gymnasiums in einem Umfang von 30 Unterrichtsstunden. Inhaltlich entsprechen die Lehrpläne zur Kugelgeometrie heute nahezu unverändert den traditionellen Inhalten.

2. Computerwerkzeuge zur Kugelgeometrie

Im Unterricht zur Kugelgeometrie stellt die Darstellung der Figuren auf der Kugeloberfläche eine großes Problem dar. Für Projektionszeichnungen fehlen in der Regel die Voraussetzungen aus der darstellenden Geometrie. Darüber hinaus sind diese, wie viele andere Hilfsmittel im Unterricht sehr zeitaufwendig. Hier bietet heute der Einsatz des Computers große Möglichkeiten.

Das erste Computerprogramm zur Kugelgeometrie war 1990 das Programm **Kugel** von K. Stecher, U. Freiberger und B. Eder, das an der Zentralstelle für Computer in Unterricht in Augsburg entwickelt wurde.

Mitte der 90er Jahre entwickelte A. Mayer das Computerprogramm **Sphäri** zur Kugelgeometrie. Es wurde bis heute kontinuierlich weiterentwickelt und umfasst neben vielseitigen Zeichenmöglichkeiten auf der Kugel auch den Zugmodus. Die Palette der Funktionen erfüllt mit Punkten, Kleinkreisen, Großkreisen, Kugelzweiecken, Kugeldreiecken, Polardreiecken und Loxodromen die Erfordernisse des Unterrichts. Zu Kugeldreiecken lassen sich direkt Polar-, Gegen-, Neben- und Scheiteldreiecke erzeugen. Zusätzlich kann man in Dreiecken Höhen, Seiten- und Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten eintragen. Darüber hinaus lassen sich der Äquator, die Polachse, der Kugelumriss und der Nullmeridian aus- und einblenden. Mit Sphäri besteht die Möglichkeit fast alle Parameter der gezeichneten Figuren, so z. B. die Seiten, Winkel und die Fläche eines Dreiecks, zu messen. Die Kugeloberfläche kann gedreht und so in jede beliebige Lage gebracht werden. Darüber hinaus lässt sich die Kugel mit variabler Geschwindigkeit kontinuierlich um drei verschiedene Achsen drehen. Diese Bewegung verstärkt den räumlichen Eindruck der Figuren auf der Kugeloberfläche. Eine weitere wichtige Funktion ist der Zugmodus, den man von den ebenen dynamischen Geometrieprogrammen kennt. Punkte auf der Kugeloberfläche können mit der Maus kontinuierlich verschoben werden, wobei sich alle aus dem Punkt resultierenden Linien kontinuierlich verändern.

In den Jahren von 1993 bis 1998 wurde von J. Richter-Gebert und U. Kortenkamp das Geometrieprogramm **Cinderella** auf der Basis der Cayley-Klein-Geometrie entwickelt. Mit Cinderella lassen sich Figuren der euklidischen, elliptischen und hyperbolischen Geometrie darstellen. Auch wenn die Darstellung von geometrischen Figuren der sphärischen Trigonometrie nicht der Beweggrund zur Entwicklung von Cinderella war, ist Cinderella ein für den Unterricht zur Kugelgeometrie hervorragend geeignetes Programm.

Der Funktionenumfang von Cinderella umfasst alle für den Unterricht in Kugelgeometrie notwendigen Befehle, wie Punkte, Kleinkreise, Großkreise, Winkelhalbierenden und Lotkreise, aber auch Kegelschnitte. Es können Strecken, Winkel und Flächen gemessen werden. Im Gegensatz zu Sphäri fehlen alle Funktionen, die mit dem Koordinatensystem auf der Kugeloberfläche zu tun haben, z. B. können Punkte nicht durch ihre Koordinaten bestimmt werden und man kann nicht umgekehrt die Koordinaten eines bestimmten Punktes erhalten. Bei Cinderella steht wie bei Sphäri der Zugmodus zur Verfügung. Im Gegensatz zu Sphäri werden bei Cinderella Messwerte bei Verwendung des Zugmodus kontinuierlich aktualisiert.
Die bisher genannten Funktionen von Cinderella entsprechen im wesentlichen den Möglichkeiten von Sphäri. Ein entscheidender Fortschritt von Cinderella ist die Mög-

lichkeit die angefertigten Zeichnungen und Animationen als Java-Applets in HTML-Dateien zu exportieren und interaktive Arbeitsblätter zu erstellen.

3. Computerintegrierender Lehrgang zur Kugelgeometrie

Durch den Einsatz des Computers im Unterricht zur Kugelgeometrie ist man nicht mehr auf zeitraubende und schwierige Zeichnungen angewiesen. Darüber hinaus erleichtert der Computer die Vorstellung der geometrischen Figuren auf der Kugeloberfläche ganz wesentlich. Damit gewinnt man im Unterricht Zeit und kann neue Schwerpunkte setzen und neue Inhalte aufnehmen.

Im Folgenden wird ein Lehrgang zur Kugelgeometrie vorgestellt, in dem das Computerprogramm Sphäri eingesetzt wird. Das Computerprogramm Cinderella stand zum Zeitpunkt der Entwicklung des Lehrgangs noch nicht zur Verfügung. In acht der 28 Unterrichtsstunden arbeiten die Schüler im Computerraum selbständig mit dem Computer. In diesen schülerzentrierten Arbeitsphasen haben die Schüler Gelegenheit in ihrem individuellen Arbeitstempo Zusammenhänge zu entdecken. In fast allen anderen Stunden arbeitet der Lehrer mit dem Computer und benutzt ihn als Demonstrationsmedium im regulären Unterricht im Klassenzimmer. Bei der Auswahl der Lerninhalte wird der Schwerpunkt auf die Herstellung von Querbezügen und Analogien zur ebenen Geometrie gesetzt. Berechnungen auf der Kugeloberfläche erhalten weniger Raum als in konventionellen Lehrgängen.

Inhaltlich beginnt man mit grundlegenden Begriffen. Zunächst wird die geographische Länge und Breite, der Äquator, die Pole, Kleinkreise und Großkreise eingeführt. Zu den Grundlagen zählen auch das Kugelzweieck mit seiner Fläche. Hier nimmt man zum einen auf die Geographie Bezug und betrachtet zum anderen immer auch die ebene Entsprechung. Z. B. wird bei den Großkreisen diskutiert, dass sie in der Ebene den Geraden entsprechen, es aber kein Analogon zu parallelen Geraden gibt. Anschließend behandelt man das Kugeldreieck. Die Fläche des Kugeldreiecks erarbeiten die Schüler im Computerraum selbständig unter Führung eines Arbeitsblattes. In zwei weiteren Stunden beschäftigt man sich mit dem Pol eines Großkreises und dem Polardreieck. Die Formeln im rechtwinkligen Dreieck bereiten die Schüler im Computerraum vor, so dass sie in der anschließenden Stunde nur noch zusammengefasst werden müssen. Daraus leitet man in einem Grenzübergang zur ebenen Geometrie alle Formeln des ebenen rechtwinkligen Dreiecks ab.
In den folgenden Stunden unterscheidet sich der Lehrgang dann deutlich von konventionellen Lehrgängen. Als Anwendung der Formeln am rechtwinkligen Dreieck beschäftigt man sich mit dem sphärischen Sehnenviereck, dem Umfangswinkelsatz auf der Kugel (Satz von Lexell), den Transversalen im Kugeldreieck und mit dem sphärischen Höhenfußpunktdreieck. Hierbei wird immer auf die Herausarbeitung von Querbezügen zur ebenen Geometrie großer Wert gelegt.

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die 28 Unterrichtsstunden des entwickelten computerintegrierenden Lehrgangs zur Kugelgeometrie. In der dritten Spalte ist angegeben, in welcher Form (selbständige Arbeit der Schüler im Computerraum, Computerdemonstration des Lehrers im Klassenzimmer) der Computer im Unterricht zum Einsatz kommt.

Stunde	Thema der Stunde	Computereinsatz
1	geographische Länge, geographische Breite, Äqua-	Computerdemonstration

	tor, Breitenkreise, Längenkreise, Großkreis, Klein-	
2	kreis	Computerraum
	Kugel mit Äquator und einem Breitenkreis unter ver-	
	schiedenen Blickrichtungen, Vorüberlegung zum Ra-	
3	dius eines Breitenkreises, Vorüberlegung zum Ku-	Computerdemonstration
4	gelzweieck	Computerdemonstration
	Kugelzweieck, Fläche des Kugelzweiecks	
	Kürzeste Verbindung zweier Kugelpunkte, Analogie	
5	von Gerade und Großkreis, Abstand eines Punktes	Computerraum
	von einem Großkreis	
6	Kugeldreieck, Vorüberlegung zur Fläche des Ku-	Computerdemonstration
7	geldreiecks	Computerdemonstration
	Fläche des Kugeldreiecks, Aufgaben	
8	Kugel-n-ecke mit Analogiebetrachtung zur Ebene	Computerraum
	Pol, Polare	
9	Pol und Polare, polare Figur zum Kugelzweieck und	Computerdemonstration
10	Kugeldreieck	Computerdemonstration
11	Polardreieck	Computerraum
12-13	Aufgaben zum Kugeldreieck und Polardreieck, Drei-	Computerdemonstration
14	kant	Computerraum
15	Das rechtwinklige Kugeldreieck (1. Teil)	
16	Das rechtwinklige Kugeldreieck (2. Teil)	Computerdemonstration
17	Sphärisches Sehnenviereck	Computerdemonstration
18-19	Aufgaben zum sphärischen Sehnenviereck	Computerraum
20	Umfangswinkelsatz auf der Kugel	Computerdemonstration
21-22	Satz von Lexell	
23	Polare Figur zum Sehnenviereck (1. Teil)	Computerraum
24	Polare Figur zum Sehnenviereck (Tangentenviereck)	
25	Seitenkosinussatz, Sinussatz	Computerdemonstration
26	Transversalen im Kugeldreieck	
27	Transversalen im Kugeldreieck	Computerraum
28	Transversalen im Kugeldreieck	
	Höhenfußpunktdreieck(Vorarbeit)	
	Höhenfußpunktdreieck (Eigenschaften)	
	Höhenfußpunktdreieck (Beweis)	

4. Satz von Lexell

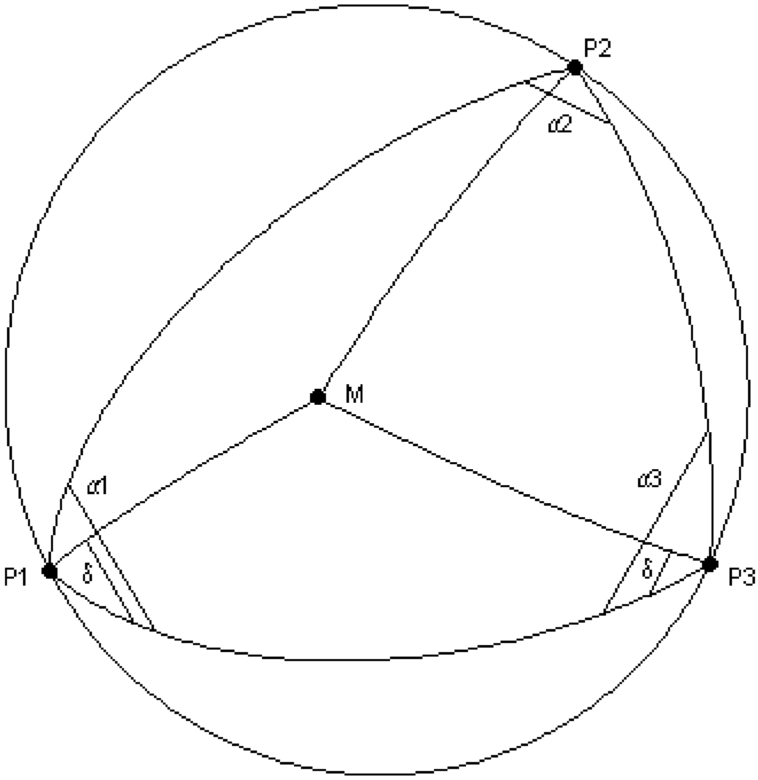
Nachdem die vollständige Dokumentation [2] des computerintegrierenden Lehrgangs den Rahmen des Aufsatzes sprengen würde, wird im Folgenden exemplarisch die Behandlung des Umfangswinkelsatzes auf der Kugel im Anschluss an die Untersuchung von Sehnenvierecken in den Stunden 16 und 17, die zum Satz von Lexell führt, ausgeführt.

Ausgehend von der Eigenschaft sphärischer Sehnenvierecke, dass die Summe je zweier gegen- überliegender Winkel gleich groß ist (sphärisches Sehnenviereck größer 180°, ebenes Sehnenviereck gleich 180°) wird der ebene Umfangswinkelsatz wiederholt:

Ebener Umfangswinkelsatz:
Wandert ein Punkt P_2 auf einem Kreisbogen über der Sehne P_1P_3, so ist die Größe des Winkels $\alpha_2 = \sphericalangle P_1P_2P_3$ konstant.

Aus der selbständigen Arbeit der Schüler in der 14. Stunde ist bereits bekannt, dass sich diese Eigenschaft nicht direkt auf die Kugel übertragen lässt. Um eine sphärische Entsprechung des ebenen Umfangswinkelsatzes zu finden drückt man den Winkel α_2 durch die anderen Winkel des sphärischen Dreiecks aus und erhält

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_1 - \delta + \alpha_3 - \delta = \alpha_1 + \alpha_3 - 2\delta.$$



In Analogie zum Umfangswinkelsatz sucht man in der Figur nach einem Winkel, dessen Wert konstant bleibt, wenn der Punkt P_2 auf einem Kreisbogen über der Sehne P_1P_3 wandert. Nachdem sich dabei die Lage der Punkte P_1, P_3 und M nicht verändert bleibt der Winkel δ konstant, wobei gilt

$$2\delta = \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2 \quad \text{(I)}.$$

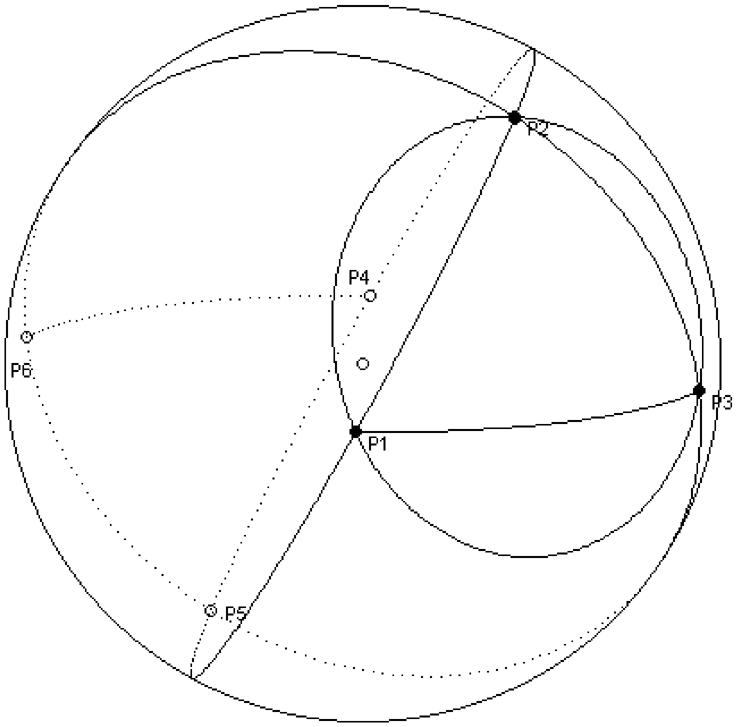
In einem nächsten Schritt wird die Konstante 2δ geometrisch interpretiert: Mit einem Trick erhält man im Term I die Fläche A des Kugeldreiecks $P_1P_2P_3$:

$$2\delta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_2 = (180°/\pi)\ A + 180° - 2\alpha_2$$

Bringt man alle konstanten Größen auf eine Seite erhält man:

$$\pi - (2\pi/180°)\ \delta = (\alpha_2/360°)\ 4\pi - A = \text{konstant (II)}$$

Der Term $(\alpha_2/360°)\ 4\pi$ ist die Fläche des Kugelzweiecks mit den Ecken P_2P_5, wobei P_5 der Gegenpunkt von P_2 ist. Subtrahiert man von der Fläche dieses Kugelzweiecks die Fläche des Kugeldreiecks $P_1P_2P_3$ erhält man die Fläche des zugehörigen Scheiteldreiecks $P_4P_2P_6$ (P_4 ist Gegenpunkt zu P_1, P_6 ist Gegenpunkt zu P_3).



Mit der direkten Übertragung des Umfangswinkelsatzes auf die Kugel scheitert man also. Man erhält jedoch als Analogie des ebenen Umfangswinkelsatzes auf der Kugel als ,,Abfallprodukt'' den

Satz von Lexell:
Wandert der Punkt P_2 auf dem Kleinkreisbogen über der Sehne P_1P_3, so bleibt die Fläche des Dreiecks $P_4P_2P_6$ konstant.

Für den kurzen Kreisbogen lässt sich der Satz auf analoge Weise zeigen. Betrachtet man das Dreieck $P_4P_2P_6$ als Ausgangsdreieck, lautet der Satz von Lexell:

Wandert der Punkt P_2 auf dem Umkreis des Scheiteldreiecks zum Dreieck $P_4P_2P_6$ bleibt die Fläche des Dreiecks $P_4P_2P_6$ konstant.

Der Lexellsche Satz gibt die Antwort auf die Frage, wo auf der Kugel alle Punkte P_2 liegen, so dass die Fläche eines Kugeldreiecks bei einer vorgegebenen festen Seite konstant bleibt. In der Ebene liegen diese Punkte P_2 offensichtlich auf dem Parallelenpaar zur vorgegebenen festen Seite. Auf der Kugeloberfläche entsprechen diesem Parallelenpaar Kleinkreise, obwohl die Analogie nicht vollständig ist.

Bei der Behandlung des Satzes von Lexell stellt der Einsatz des Computers ein ganz wesentliches Hilfsmittel dar, da sich die entsprechende geometrische Figur über die Vorder- und Rückseite der Kugeloberfläche erstreckt. Die Möglichkeit die Figur mit Hilfe des Computers von verschiedenen Seiten zu betrachten, unterstützt ganz wesentlich das räumliche Vorstellungsvermögen und macht den Satz von Lexell auch für schwächere Schüler gut zugänglich.

5. Quantitative, vergleichende Studie

Der computerintegrierende Lehrgang zur Kugelgeometrie wurde in den Schuljahren 1997/98 und 1998/1999 erfolgreich in 14 Klassen der 11. Jahrgangsstufe des mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasiums in Bayern von 13 verschiedenen Lehrern/innen durchgeführt. Insgesamt waren 304 Schüler beteiligt. In fünf Klassen mit insgesamt 122 Schülern wurde der Lehrgang vollständig (28 Stunden) durchgeführt. In weiteren fünf Klassen mit insgesamt 109 Schülern wurde der 1. Teil des Lehrgangs (15 Stunden) durchgeführt. In diesen Klasse konnte der Lehrgang leider nicht vollständig durchgeführt werden, da die Kollegen erst sehr spät im Schuljahr mit dem Projekt begonnen haben. In diesen Klasse fand der Unterricht zur Kugelgeometrie im Juni und Juli, am Schuljahresende, statt. Es ist bekannt, dass zu dieser Zeit die Motivation der Schüler etwas nachlässt. Als Referenzklassen wurden auch Klassen in Kugelgeometrie ohne Computereinsatz unterrichtet. Es handelte sich dabei um vier Klassen mit insgesamt 73 Schülern. Inhaltlich wurde in diesen Klassen der 1. Teil des Lehrgangs (15 Stunden) durchgeführt.

Tafel	C1	C2
1. Teil des Lehrgangs durchgeführt (15 Stunden)	1. Teil des Lehrgangs durchgeführt (15 Stunden)	Lehrgang vollständig durchgeführt (28 Stunden)
ohne Computereinsatz	Nutzung des Computerprogramms Sphäri (Computerdemonstrationen des Lehrers und selbstständige Arbeit der Schüler im Computerraum)	Nutzung des Computerprogramms Sphäri (Computerdemonstrationen des Lehrers und selbstständige Arbeit der Schüler im Computerraum)
4 Klassen 73 Schüler	5 Klassen 109 Schüler	5 Klassen 122 Schüler

Wenn man einen Lehrgang nach einem neuen Unterrichtskonzept erstellt, stellt sich die Frage, ob er Vor- oder Nachteile gegenüber der herkömmlichen Methode besitzt. Um zu dieser Frage valide Aussagen zu erhalten wurden zum Lehrgang Fragebögen für die Schüler und Lehrer entwickelt, die vor Beginn und nach Abschluss des Lehrgangs bearbeitet wurden. Die Fragebögen enthalten Fragen zu den Vorerfahrungen der Schüler und Lehrer, zum Computereinsatz in der Schule, zur Beurteilung des entwickelten Lehrgangs zur Kugelgeometrie, zu den Fachkenntnissen in Mathematik und zum Raumvorstellungsvermögen. Eine Auswahl der Ergebnisse der Fragebogenuntersuchung ist im folgenden dargestellt.

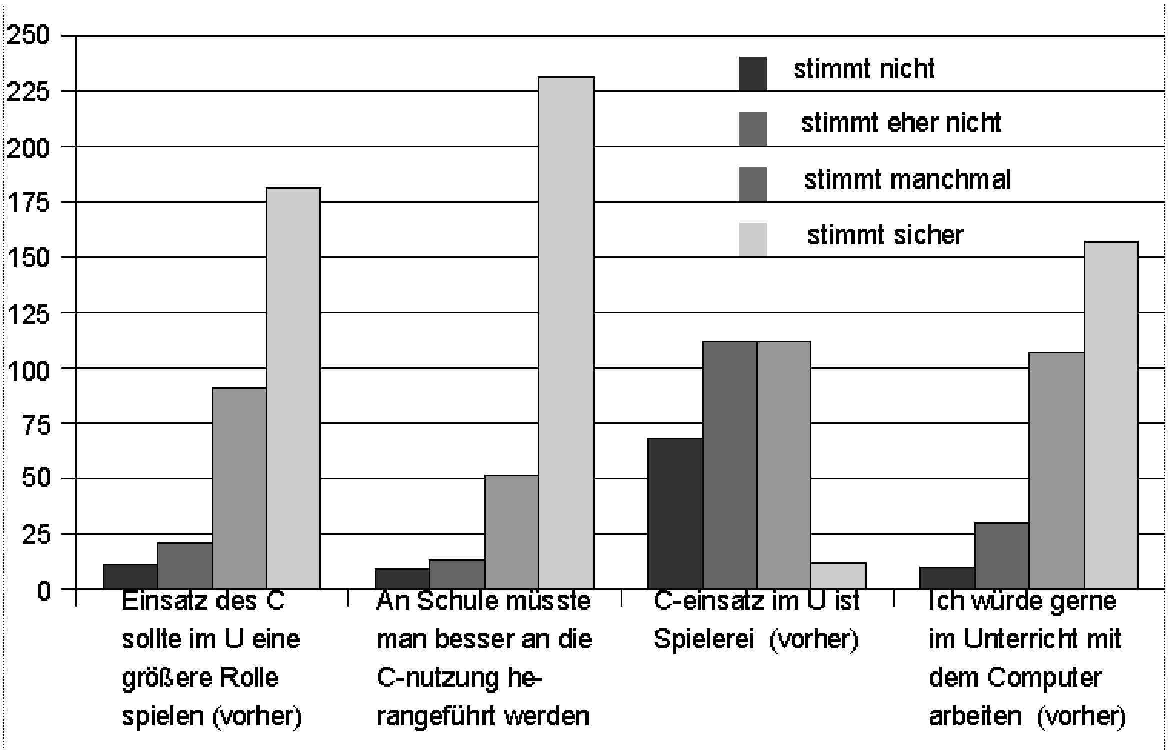
6. Ergebnisse

- **Vorerfahrungen der Schüler**
  Heute kann man davon ausgehen, dass fast jeder Schüler zu Hause Zugang zu einem Computer hat. Jungen besitzen wesentlich häufiger einen eigenen Computer als Mädchen. Mädchen verbringen wesentlich weniger Zeit am Computer und besuchen seltener Wahlkurse in Informatik. Im Mathematikunterricht spielt, ebenso wie im Unterricht anderer Fächer, heute der Computereinsatz nur eine sehr untergeordnete Rolle.

- **Vorerfahrungen der Lehrer**
  Die befragten Lehrer haben den Computer bisher am häufigsten im Rahmen von Informatikwahlkursen unter Verwendung von Programmiersprachen eingesetzt. Im Mathematikunterricht war der Computer bisher eine Ausnahmeerscheinung.

Computerdemonstrationen im Unterricht wurden von den befragten Lehrern bisher nur sehr selten gemacht.

- **Erwartungshaltung der Schüler zum Computereinsatz im Unterricht**
  Um hierüber Informationen zu gewinnen, wurden die Schüler im Vor- und Nachtest aufgefordert eine Reihe von Thesen auf einer Skale von ,,stimmt nicht'', ,,stimmt eher nicht'', ,,stimmt eher'' bis ,,stimmt sicher'' zu bewerten. Die Verteilung der Schülerantworten ist in folgendem Diagramm dargestellt:



Es besteht bei den Schülern eine ernorme Erwartungshaltung für den Einsatz des Computers in der Schule. Die Verteilung der Antworten unterscheidet sich zwischen Vor- und Nachtest kaum.

- **Raumvorstellungsvermögen der Schüler**
  Durch die Beschäftigung mit der Raumgeometrie, speziell mit der Kugelgeometrie erhofft man sich eine Verbesserung des Raumvorstellungsvermögens. Es stellt sich in diesem Zusammenhang die Frage, ob der Einsatz des Computers das Raumvorstellungsvermögen fördert. Das räumliche Vorstellungsvermögen ist ein Faktor der menschlichen Intelligenz bei dem sich nach Thurstone die drei Bereiche Veranschaulichung (Visualiuation), räumliche Beziehung (spatial relations) und räumliche Orientierung (spatial orientation) unterscheiden lassen. In den Fragebogen des Vor- und Nachtest wurde zu jedem dieser Bereiche ein spezifischer Raumvorstellungstest aufgenommen:

	Differenz PSB Mädchen	Differenz PSB Jungen	Differenz IST Mädchen	Differenz IST Jungen
Tafel	1,00	1,73	0,41	0,70
C1	1,22	2,37	3,10	1,06
C2	0,23	1,71	3,36	1,84
maximal erreichbare	40	40	20	20

Punktzahl				

	Differenz Schlauchfiguren Mädchen	Differenz Schlauchfiguren Jungen	Differenz Kugelfiguren Mädchen	Differenz Kugelfiguren Jungen
Tafel	-2,04	-2,34	-0,62	-0,64
C1	-0,56	-0,85	1,66	-0,07
C2	0,49	0,52	1,87	1,62
maximal erreichbare Punktzahl	10	10	15	15

Um Veränderungen im Bereich der Veranschaulichung (Visualiuation) nach Thurstone zu untersuchen, wird der Raumvorstellungstest des PSB-Tests bearbeitet. Hier müssen sie Punkte eines Körpers den entsprechenden Punkten des Körpernetzes zugeordnet werden, wozu man sich die Faltung des Körpernetzes zum Körper vorstellen können muss. Bei der Arbeit mit dem Computerprogramm Sphäri spielt diese Fähigkeit eine untergeordnete Rolle und wird nicht explizit geschult. Aus diesem Grund ist in diesem Bereich kein Unterschied für verschiedenes Treatment zu erwarten, was sich auch in den Testergebnissen bestätigt.

Um Veränderungen im Bereich der räumlichen Beziehung (spatial relations) nach Thurstone zu untersuchen, wird der Raumvorstellungstest des IST-Tests (Würfeldrehtest von Gittler) in den Fragebogen aufgenommen. Hier müssen perspektivische Zeichnungen von Würfeln erfasst und perspektivischen Zeichnungen von entsprechenden Würfeln in einer gedrehten Lage zugeordnet werden. Bei der Arbeit mit dem Computerprogramm Sphäri wird die Fähigkeit durch die Möglichkeit, die Kugel in verschiedenen, zueinander räumlich verdrehten Lagen zu betrachten geschult. Aus diesem Grund ist in diesem Bereich ein Unterschied für verschiedenes Treatment zu erwarten.
Die Ergebnisse der Gruppe C2 sind besser als jene der Gruppe C1 und diese wiederum besser als die Ergebnisse der Gruppe Tafel. Die Mittelwerte der Differenzen unterscheiden sich signifikant zwischen den Treatments Tafel und C2.

Um Veränderungen im Bereich der räumlichen Orientierung (spatial orientation) nach Thurstone zu untersuchen, bearbeiten die Schüler im Vor- und Nachtest einen Schlauchfigurentest. Hier werden zwei Abbildungen mit einem Schlauch in einem durchsichtigen Würfel gegenübergestellt. Im ersten Bild blickt man von vorne auf den Würfel, im zweiten Bild blickt man aus einer anderen Richtung auf den Würfel. Man muss nun entscheiden, aus welcher Richtung der Würfel im zweiten Bild zu sehen ist. Auch dieser Test prüft Fähigkeiten ab, die bei der Arbeit mit dem Computerprogramm Sphäri geschult werden. Aus diesem Grund sind in diesem Bereich Unterschiede für verschiedenes Treatment zu erwarten. Die Testergebnisse für das Treatment Tafel und C1 sind nach der Durchführung des Lehrgangs schlechter als zuvor. Dies wird aus den Beobachtungen der Lehrer verständlich. Die Motivation zum Ausfüllen der Fragebögen war in allen Klassen beim Nachtest deutlich geringer als beim Vortest. Da dieses Phänomen aber in allen Klassen aufgetreten ist, macht es dennoch Sinn die Veränderungen zu vergleichen. Die Schüler, die mit dem Computer unterrichtet wurden, schneiden im Schlauchfigurentest sehr signifikant besser ab, als die Schüler mit dem Treatment Tafel. Unterscheidet man weiter nach der Dauer des Kugelgeometrieunterrichts, schneiden die Schüler mit dem längeren Kugelgeometrieunterricht am Computer sehr signifikant besser ab.

Als ein auf die Inhalte des Unterrichts zugeschnittenen Test wird der Kugelfigurentest aufgenommen. Es handelt sich dabei um eine Abwandlung des Schlauchfigurentests. Der Würfel mit dem Schlauch wird durch eine Figur auf der Kugeloberfläche ersetzt. Der Kugelfigurentest zielt ähnlich wie der Schlauchfigurentest auf die räumliche Orientierung und prüft Fähigkeiten, die bei der Arbeit mit dem Computerprogramm Sphäri geschult werden. Aus diesem Grund ist in diesem Bereich ein Unterschied für verschiedenes Treatment zu erwarten.
Die Testergebnisse für das Treatment Tafel und C1 sind nach der Durchführung des Lehrgangs schlechter als zuvor, was sich analog zu den Ergebnissen des Schlauchfigurentests erklären lässt. Vergleicht man die Ergebnisse für verschiedenes Treatment, lassen sich sehr signifikante Unterschiede feststellen. Die Ergebnisse der Treatmentgruppe C2 sind sehr signifikant besser als die der Treatmentgruppen C1 und diese sind wiederum sehr signifikant besser als die der Treatmentgruppe Tafel.

Neben dem Vergleich der Ergebnisse für verschiedenes Treatment wurden auch geschlechtsspezifische Unterschiede untersucht. In allen Raumvorstellungstest unterscheiden sich die Ergebnisse von Jungen und Mädchen nach dem Kugelgeometrieunterricht deutlich weniger als vorher. Während z. B. im Vortest des Raumvorstellungstest des IST-Tests und im Kugelfigurentest signifikante Unterschiede zwischen Jungen und Mädchen auftreten, sind diese nach dem Kugelgeometrieunterricht verschwunden. Der Kugelgeometrieunterricht hat auf das Raumvorstellungsvermögen von Jungen und Mädchen eine ausgleichende Wirkung. Nach dem Lehrgang erhält man in keinem der vier Raumvorstellungstests erkennbare Unterschiede in den Ergebnisse von Jungen und Mädchen.

- **Fachkenntnisse im Bereich der Kugelgeometrie**
  Der erste Fragenkomplex umfasst Fragestellungen, die bereits früher im Erdkunde- oder Mathematikunterricht vorgekommen sind, wie z. B. Fragen zu den Längen- und Breitenkreisen auf der Erde. Durch die Beschäftigung mit der Kugelgeometrie ist bei diesen Fragen eine Verbesserung der Testergebnisse zu erwarten.
  Die Zunahme der erreichten Punkte vom Vor- zum Nachtest ist für alle drei Treatmentgruppen wie erwartet sehr signifikant. Die Werte unterscheiden sich jedoch für verschiedene Treatments nicht signifikant.

  In einer zweiten Fragengruppe werden Fragen zum neuen Stoff des Kugelgeometrieunterrichts gestellt. Diese beinhalten ausschließlich die Inhalte des momentan üblichen Kugelgeo- metrieunterrichts. Sie zielen nicht speziell auf Bereiche, die durch den Computereinsatz besonders gefördert werden.
  Die Ergebnisse unterscheiden sich für die Treatments Tafel und C1 nicht signifikant. Trotz der am Computer verbrachten Zeit erreichen die Schüler bei den konventionellen Fragestellungen vergleichbare Ergebnisse.
  Die Gruppe mit dem Treatment C2 erhält einen umfangreicheren Unterricht in Kugelgeometrie. Die Ergebnisse dieser Schüler sind sehr signifikant besser als für das Treatment Tafel und C1. Das weitere Anwenden der Kenntnisse vertieft offensichtlich die Grundlagen soweit, dass sich dies auch in den Testergebnisse deutlich wiederspiegelt.

- **Beurteilung des Computereinsatzes durch die Schüler**
  Im Folgenden ist eine Auswahl der Ergebnisse zusammengestellt:
  Die Bedienung des Computers stellt für die Schüler im Lehrgang keinerlei Schwierigkeit dar. Die Schüler sehen im Computereinsatz des Lehrgangs nicht in ersten Linie einen Zuwachs an Spaß im Unterricht, sondern ein echtes Hilfsmittel zur Vorstellung der Figuren auf der Kugeloberfläche. Ebenfalls noch vor dem Zugewinn an Spaß im Unterricht wird der positive Einfluss auf den Unterricht (,,...lockert den Unterricht auf", ,,...bereichert den Unterricht", ,,...machen Kugelgeometrie abwechslungsreich") bewertet. In allen Fragen wird der Unterrichtseinsatz des Computers sehr positiv bewertet. Die größte Zustimmung erfährt die These, ,,die Bearbeitung von Arbeitsblättern im Computerraum...'' bzw. ,,Computerdemonstrationen im regulären Unterricht erleichtern die Vorstellung der Figuren in der Kugelgeometrie''.
  Vergleicht man die Bewertungen für die Bearbeitung von Arbeitsblättern im Computerraum und die der Computerdemonstrationen im regulären Unterricht, werden bei allen Thesen die Computerdemonstrationen im regulären Unterricht positiver bewertet, als die Bearbeitung von Arbeitsblättern im Computerraum.
  Von den Mädchen werden die Bearbeitung von Arbeitsblättern im Computerraum und die Computerdemonstrationen im regulären Unterricht positiver beurteilt, als von den Jungen.

- **Beurteilung des Computereinsatzes durch die Lehrer**

Im folgenden ist eine Auswahl der Ergebnisse zusammengestellt:
Von den Lehrern, die das Computerprogramm Sphäri im Unterricht einsetzten, wird das Computerprogramm sehr positiv beurteilt. Sowohl die Bearbeitung von Arbeitsblättern im Computerraum, als auch Computerdemonstrationen im regulären Unterricht wird sehr positiv und gewinnbringend eingeschätzt. Der Computereinsatz im Unterricht allgemein wird vor und nach dem Lehrgang zur Kugelgeometrie von den befragten Lehrern sehr positiv beurteilt. Im Vergleich zu den Schülerwertungen bewerten die Lehrer die Arbeit im Computerraum deutlich positiver, als die Schüler. Bei den Bewertungen der Computerdemonstrationen unterscheiden sich die Wertungen von Schülern und Lehrern nur wenig.

6. Literatur

[1] H.-G. Bigalke, Kugelgeometrie, Otto Salle Verlag GmbH & Co., Frankfurt am Main 1984
[2] M. Christl, Beiträge zum Computereinsatz in der Schule, Kugelgeometrie mit dem Computer, Weingarten, 1998
[3] H. Kern, J. Rung, Sphärische Trigonometrie, Bayerischer Schulbuch-Verlag, München, 1988
[4] G. Groschof, Kugelgeometrie, Ernst Klett Schulbuchverlag, 1983
[5] A. Mayer, Sphäri 5.0 (Interaktives Windowsprogramm zur Kugelgeometrie), München: Eigenverlag, 1997/99
[6] J. Richter-Gebert, U. H. Kortenkamp, The Interactive Geometry Software Cinderella, Springer Verlag, 1999
[7] H. Schumann, Raumgeometrie, Unterricht mit Computerwerkzeugen, Cornelsen Verlag,
Berlin, 2001
[8] M. Steckermeier-Christl, Der Lexellsche Satz im Unterricht, MNU 48/4, S. 216-220

Adresse der Autorin:
Studienrätin Monika Christl
Joh.-Mich.-Sailerweg 1
84137 Vilsbiburg
Email: monika.christl@gymnasium.vilsbiburg.de