

## Ein plattformunabhängiges Werkzeug für die dynamischen Raumgeometrie

### Einleitung

Für planimetrisches Konstruieren in den Sekundarstufen I und II gibt es mittlerweile eine reichhaltige Auswahl von Software-Paketen (Cabri-Géomètre, Geometer's Sketchpad, Euklid, Cinderella, GeoNet etc.), welche den Geometrie-Unterricht in den letzten Jahren nachhaltig beeinflusst haben. Wesentliche Impulse ergeben sich vor allem durch ihre Fähigkeit, Konstruktionen durch Ziehen mit der Maus an Basisobjekten interaktiv zu verändern, wobei die geometrischen Relationen zwischen den Objekten invariant bleiben. Dieser sogenannte Zugmodus erlaubt u.a. durch geeignetes Variieren einer einmal durchgeföhrten Konstruktion experimentelles Entdecken von geometrischen Sätzen. Besonders hilfreich erweist sich dabei die Darstellung der Spur eines abhängigen Punktes als Ortskurve, welche die Satzfindung unterstützen kann, aber auch ästhetische Aspekte der Geometrie zum Ausdruck bringt.

Demgegenüber hinkt die Entwicklung von Raumgeometrie-Software mit entsprechenden Möglichkeiten nach. In den letzten Jahren wurden zwar einige diesbezügliche Versuche unternommen, welche aber nicht zu einer größeren Verbreitung und schon gar nicht zu einer gewissen Standardisierung solcher Programme geführt haben. Der 1994-1999 vom Autor entwickelte „3D-Geometer“ hat an schweizerischen Gymnasien einige Beachtung gefunden, ist aber in Deutschland und Österreich wenig bekannt, weil er nur für Macintosh-Computer implementiert wurde. Im Jahr 2000 wurde eine sehr eingeschränkte Fassung als „MiniGeometer“ unter [www.geosoft.ch](http://www.geosoft.ch) bereitgestellt, die auch auf Windows-Rechnern läuft.

Im folgenden wird der Prototyp eines plattformunabhängigen Software-Werkzeugs mit dem Arbeitstitel „Geometer PRO“ vorgestellt, welches derzeit mit der Programmiersprache Java entwickelt wird und im Laufe des Jahres 2002 als Applikation unter MacOS und Windows zur Verfügung stehen soll. Eine in Entwicklung befindliche Vorversion als Java-Applet - mit eingeschränkten Möglichkeiten - findet man ab Herbst 2001 unter der Internet-Adresse [www.geosoft.ch/geometer](http://www.geosoft.ch/geometer). Für den praktischen Einsatz hat dies zur Folge, dass in der Schule GeometerPRO als Applikation auf einer bestimmten Plattform zur Verfügung steht, man zu Hause aber mit dem Applet in einem Browser auf irgend einem Betriebssystem arbeiten kann, ohne im Besitz der Applikation zu sein. Die erstellten Dateien lassen sich ebenfalls plattformunabhängig von der Festplatte oder über das Internet von einem Server laden.

Dieser Beitrag will nicht primär auf die didaktischen Möglichkeiten solcher Software eingehen, sondern vor allem die spezifischen Anforderungen bei der Realisierung von Raumgeometrie-Programmen erörtern und Lösungsmöglichkeiten am Beispiel des Prototyps von GeometerPRO darlegen.

## Konzeption

Ausgehend von den eingangs angesprochenen charakteristischen Eigenschaften von Planimetrie-Software sind für ein Raumgeometrie-Programm folgende minimale Möglichkeiten zu fordern :

- Echtzeit-Zugmodus im Raum
- Animationen und Ortslinien im Raum
- Herstellen und Anwenden von Makros zu räumlichen Konstruktionen
- Werkzeuge zum Messen im Raum
- Analytische Darstellung der Objekte

Zu den planimetrischen Objekten Punkt, Gerade, Kreis und Polygon kommen die Ebene, die Kugel, sowie Polyeder, Zylinder und Kegel als räumliche Grundelemente hinzu. Zusätzlich ergeben sich weitere Optionen, welche in berufsspezifischen 3D-CAD-Programmen in der Regel schon realisiert sind :

- Darstellung der Raumbilder in verschiedenen Projektionsarten
- Echtzeit-Veränderung der Projektionsrichtung
- Explizite Wahl der Projektionsrichtung bzw. Projektionsebene
- Verschiedene 3D-Darstellungen (Anaglyphen, Rendering)

Um dem ungeübten Anwender den Zugang zum Arbeiten mit räumlichen Werkzeugen zu erleichtern, soll eine Planimetrie-Umgebung integriert sein, so dass der Benutzer den Einstieg in die Software in einer einfacheren Situation vornehmen kann. Der 3D-Teil der Software muss dabei möglichst analoge Eigenschaften aufweisen, welche einen Wechsel vom 2D- in den 3D-Modus ohne größere Schwierigkeiten gestatten. Allerdings ist aus prinzipiellen Gründen kein dimensionsübergreifendes Interface vorgesehen. Eine ebene Konstruktion kann also nicht in den Raum portiert werden, da z.B. eine Mittelsenkrechte in der Ebene durch zwei verschiedene Punkte wohldefiniert, im Raum aber nicht eindeutig bestimmt ist.

Wünschenswert ist eine plattformunabhängige Graphik-Ausgabe im EPS-Format, womit besonders exakte Zeichnungen erstellt und in andere Programme (z.B. in eine Textverarbeitung) eingefügt werden können. Analytische Darstellungen erfolgen mit Vorteil auch im LATEX-Format, setzen dann allerdings eine LATEX-Umgebung beim Anwender voraus.

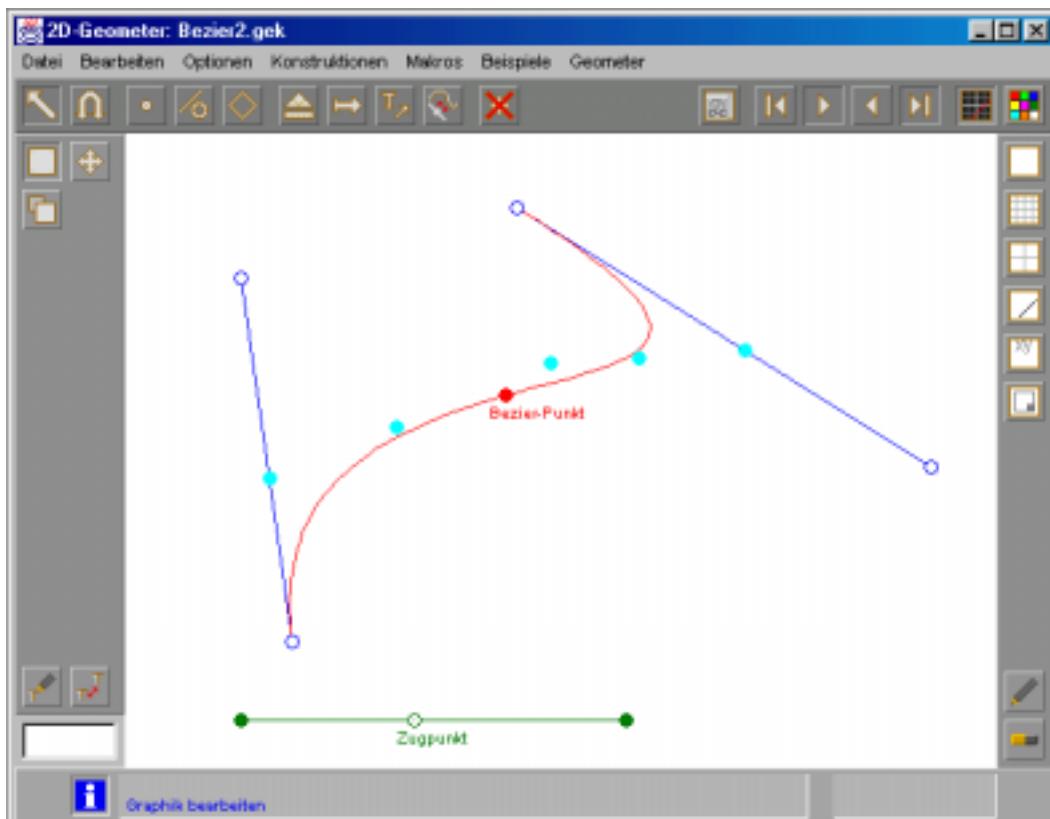
In den nachstehenden Ausführungen werden nun mögliche Realisierungen der erwähnten Konzepte beschrieben, so wie sie in der Prototyp-Version vorgesehen sind. Bis zum Erscheinen der ersten Version von GeometerPRO sind sinnvolle Korrekturen und Ergänzungen denkbar. Noch nicht implementiert ist derzeit eine optimale 3D-Darstellung, da hierzu die neuesten Entwicklungen der Programmiersprache Java mit Java3D abgewartet werden müssen.

Aus Platzgründen beschränke ich mich im wesentlichen auf die Beschreibung des 3D-Teils und gebe nur einige knappe Hinweise zum 2D-Teil soweit es für das Verständnis des raumgeometrischen Teils vorausgesetzt ist. Die abgebildeten Ausschnitte der Benutzeroberfläche stammen meistens aus der Macintosh-Version, weisen aber unter Windows keine nennenswerten Unterschiede auf.

## Beschreibung des Prototyps

### Die Benutzeroberfläche

Die Benutzeroberfläche von GeometerPRO besitzt am oberen Rand eine horizontale Leiste, mit welcher am linken Rand alle Operationspaletten sichtbar gemacht werden können. Ebenso lässt sich am rechten Rand jede Einstellung Ändern. In der unteren Leiste wird jede vom Benutzer vorgenommene Wahl kommentiert, wobei die Texte wahlweise in deutscher oder englischer Sprache erscheinen.



**Abb. 1: 2D-Benutzeroberfläche unter Windows**

Ob eine 2D- oder 3D-Konstruktion erstellt werden soll, legt der Benutzer jeweils bei der Wahl des Neu-Untermenüs fest :



**Abb. 2: Datei-Menü von Geometer PRO unter Apple-Macintosh**

Die obere Palette umfasst dann dimensionsabhängige Schaltflächen (Abb. 3) für die entsprechenden Objekte. Zu den Schaltflächen für Punkte, Geraden und Kreise sowie für Polygone kommen im 3D-Modus noch solche für Ebenen und Kugeln, Polyeder, Zylinder und Kegel hinzu. In jedem Fall zugänglich sind die Paletten für Messoperationen, Transformationen, Markierungen und Animationen bzw. Ortskurven:



Abb. 3: Schaltflächen für Objekte im 2D- bzw. 3D-Modus

Jede Schaltfläche liefert wiederum dimensionsabhängig diejenigen Operationen, welche die gewählte Objektart als Ausgabeobjekt besitzen. Da GeometerPRO in der finalen Version Über 50 Operationen umfassen dürfte, wurde viel Wert auf eine übersichtlich strukturierte Oberfläche gelegt.

Weil GeometerPRO auch als Java-Applet in einem Internet-Browser laufen soll und damit in diesem Fall keine eigene Menüleiste besitzt, befinden sich in den Menüs der Applikation keine zusätzlichen Befehle für geometrische Operationen. Im wesentlichen wird nur die Dateiverwaltung über die Menüs abgewickelt (Abb. 2) und man kann mit Tastaturkürzeln rascher in den Paletten navigieren (Abb. 4) sowie optionale Einstellungen verändern (Abb. 5).



Abb. 4: Bearbeiten-Menü

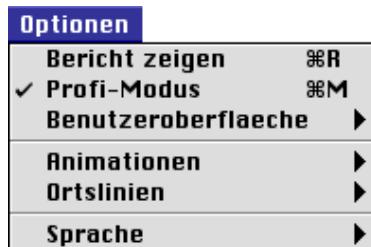


Abb. 5: Optionen-Menü

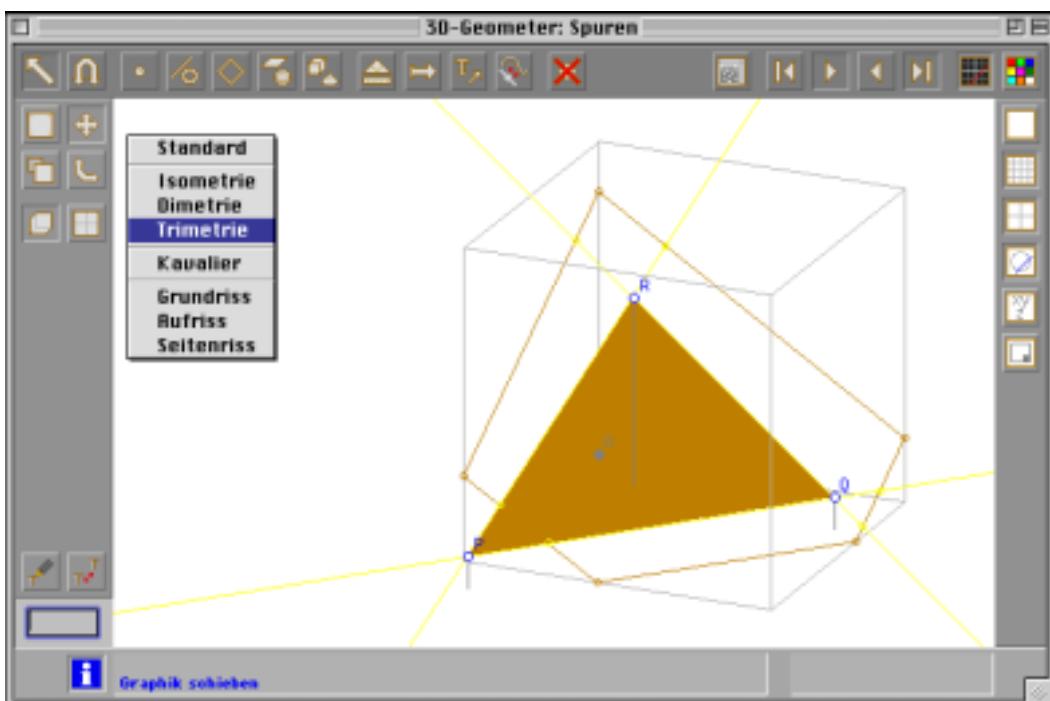
Das Konstruktionen-Menü (Abb. 6) erlaubt das parallele Arbeiten an mehreren Konstruktionen, wobei sowohl 2D- als auch 3D-Konstruktionen vorkommen können.



Klemenz "Plattformunabhängiges Computerwerkzeug"

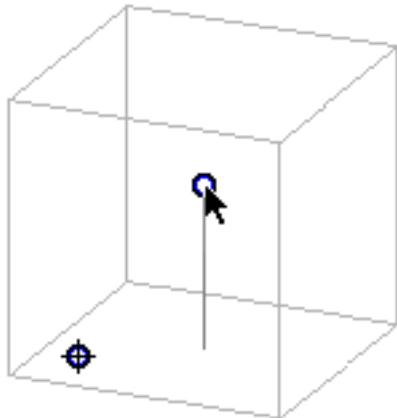
**Abb. 6: Konstruktionen-Menü**  
3D-Konstruktion

Soll eine 3D-Konstruktion erstellt werden, gelangt man entsprechender Menü-Wahl in die unten dargestellte Umgebung. Entweder lässt man sich die Konstruktion in einer Normalprojektion (Abb. 7) oder simultan noch in Grund-, Auf- und Seitenriss zeigen. Mit der Maus kann jederzeit durch Ziehen im Graphikfenster die Projektionsrichtung verändert werden. Man stelle sich dazu einen virtuellen Trackball vor, dessen Zentrum im Koordinatenursprung liegt. Die Lage des Hilfswürfels und des damit verbundenen Koordinatensystems bezüglich des Fensters kann ebenfalls mit der Maus verändert werden. Spezielle Projektionsarten lassen sich mit dem geöffneten Pop-Up-Menü realisieren.



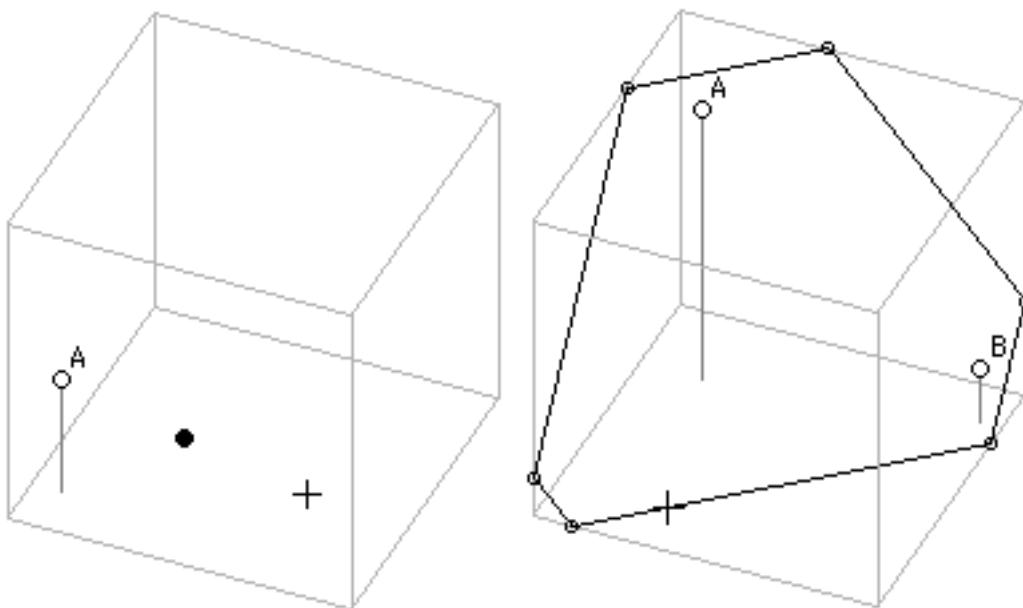
**Abb. 7: Darstellung einer Ebene als Würfelschnitt**

Wie konstruiert man nun direkt im 3D-Bild? Basispunkte im Raum lassen sich nach der Wahl der zugehörigen Schaltfläche durch einen einzigen Mausklick setzen, indem beim Klicken mit dem Fadenkreuz-Cursor die x- und y-Koordinaten des Punktes provisorisch festgelegt, beim anschliessenden Ziehen ohne Loslassen der Maus aber wieder geändert werden können. Das gleichzeitige Drücken der Shift-Taste erlaubt jederzeit die Variation der z-Koordinate des Punktes.



**Abb. 8: Punkt mit Shift-Klick setzen**

In GeometerPRO kann man in verschiedenen Modi konstruieren. Normalerweise werden sowohl Basispunkte als auch abgeleitete Objekte mit der Maus direkt im Zeichnungsfenster erzeugt. Dabei arbeitet man mit Vorteil im Profi-Modus, der als Option gewählt werden kann. Dadurch ist es möglich, während der Operation auch neue Basispunkte zu setzen und nicht nur auf bestehende zuzugreifen. Der Fadenkreuz-Cursor zeigt den potenziellen neuen Basispunkt in der xy-Ebene an, welcher erst durch Shift-Klick gesetzt wird. Die zu erzeugenden Objekte (Abb. 9: Mittelpunkt zweier Punkte bzw. Ebene durch drei Punkte) werden dabei in ihrer aktuellen Lage angezeigt.



**Abb. 9: Mittelpunkt bzw. Ebene mit Shift-Klick**

Der Zugriff auf bestehende Objekte im Raum erweist sich als nichttrivial. Bei Geraden klickt man zweckmässigerweise die zugehörige Bildgerade, bei Ebenen bietet sich das Schnittpolygon der Ebene mit dem Hilfswürfel an. Falls Ebene und Hilfswürfel disjunkt sind, fällt diese Möglichkeit weg, da dann keine graphische Repräsentation der Ebene stattfindet. Ein Ausweg wäre allenfalls das Anzeigen des Spurendreiecks der Ebene, welches aber nicht immer im Graphikfenster liegt.

Das Referenzieren von Objekten im Raum erfährt zusätzliche Schwierigkeiten durch die Tatsache, dass Flächen wie Ebenen oder Sphären vorkommen, deren Bilder

zwar durchaus im Graphikbereich liegen, die graphische Darstellung aber eventuell nicht sichtbar ist. Abhilfe kann einerseits der Zugmodus schaffen, indem man bestehende Basispunkte solang variiert, bis die gewünschten Objekte sichtbar sind. Andererseits lässt sich die graphische Darstellung fast beliebig zoomen, so dass sich die Wahrscheinlichkeit eines Zugriffs auf ein bestimmtes Objekt erhöht.

Alternativ kann man in jedem Fall mit Hilfe des Konstruktionsberichts arbeiten :

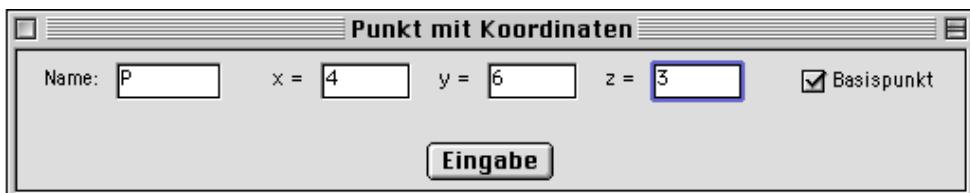


**Abb. 10: Interaktiver Konstruktionsbericht**

Der Konstruktionsbericht wird von GeometerPRO automatisch erstellt und ist auch beim Arbeiten mit einem Browser in einem eigenen Fenster untergebracht. Anstatt die Objekte in der graphischen Darstellung zu referenzieren, können sie direkt im Bericht angeklickt werden. Grundsätzlich sind alle geometrischen Operationen im Bericht realisierbar. Denkbar ist sogar ein kombiniertes Vorgehen, bei dem man einen Teil der verlangten Objekte in der Graphik und die übrigen im Bericht auswählt. Somit ist gewährleistet, dass jede Konstruktion auch bei ungünstiger Disposition durchführbar bleibt.

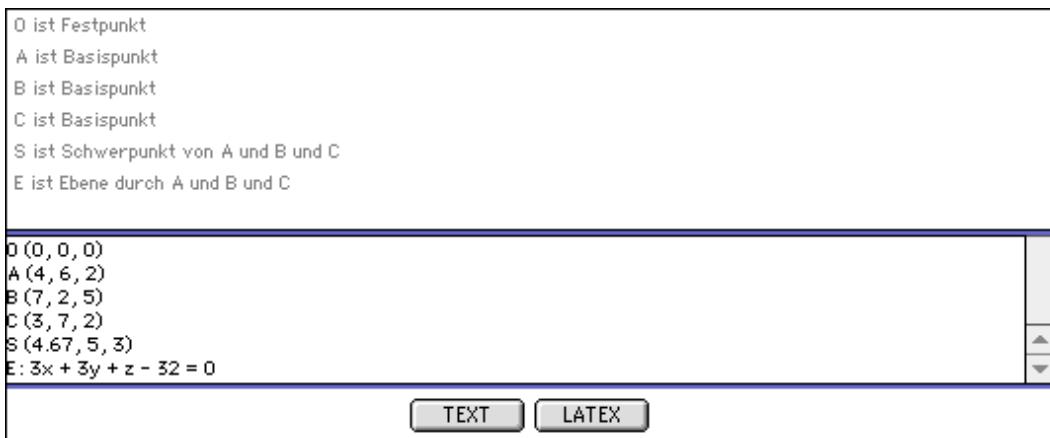
### Analytische Geometrie

GeometerPRO ist primär für den Unterricht in synthetischer Raumgeometrie konzipiert worden. Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I benötigen daher keine Kenntnisse in analytischer Geometrie. Der in der Regel bekannte Koordinatenbegriff kann hingegen nach Bedarf verwendet werden, um Basispunkte mit Koordinaten einzugeben :



**Abb. 11: Eingabe von kartesischen Koordinaten**

Ebenso kann man Geraden, Ebenen und Kugeln analytisch definieren und automatisch in der eingestellten Projektionsart zeichnen lassen. Die Ausgabe der Resultate in analytischer Form erfolgt dann in einem eigenen Bereich mit integriertem Bericht anstelle der graphischen Darstellung. Durch einen einzigen Mausklick schaltet man von der analytischen zur graphischen Darstellung und zurück.

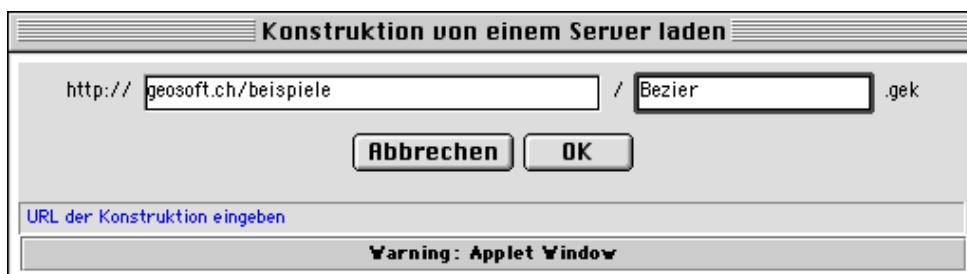


**Abb. 12: Analytische Darstellung mit integriertem Bericht**

Der obere Teil enthält den automatisch erstellten Konstruktionsbericht, welcher wahlweise in eine gewöhnliche analytische Darstellung (Abb. 12) oder ins LATEX-Format übersetzt werden kann. Der so erhaltene Text lässt sich dann über die Zwischenablage exportieren.

#### Arbeiten im Internet

Die meisten Programme zur dynamischen Planimetrie besitzen inzwischen eine Version, welche erlaubt, mit einem Java-Applet in einem Browser zu konstruieren. Cinderella ermöglicht sogar die interaktive Herstellung von HTML-Seiten mit Aufgabenstellungen und integrierten Lösungshilfen und -kontrollen. Demgegenüber kann man mit dem GeometerPRO-Applet Beispiele oder Aufgabenstellungen von einem Server (z.B. Schulserver) laden :



**Abb. 13: Laden einer Konstruktion von einem Server**

Sofern eine Lehrperson die GeometerPRO-Applikation und Zugang zu einem Server besitzt, können GeometerPRO-Dateien, welche zunächst auf der lokalen Festplatte gespeichert sind, mit einem FTP-Programm ins Netz gestellt werden. Dies erlaubt dem Lernenden im Unterricht, aber auch zu Hause diese Dateien zu laden und zu bearbeiten.

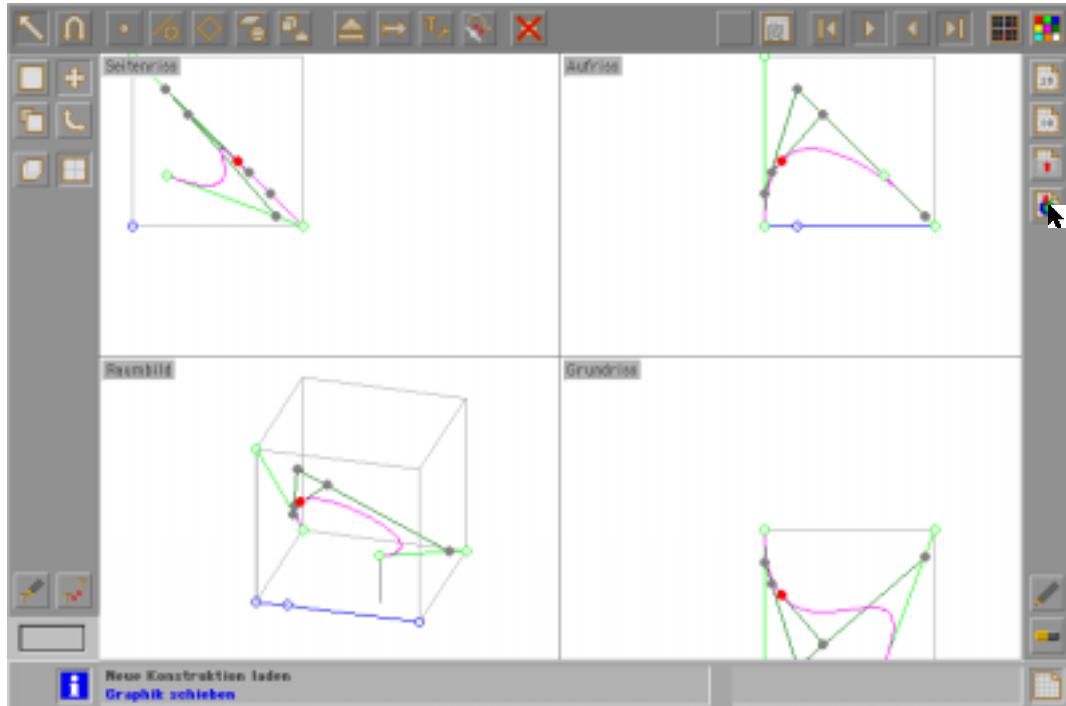


Abb.

#### 14: Bézier-Kurve im Raum

Das GeometerPRO-Applet besitzt am rechten Rand zusätzliche Schaltflächen zum Laden von Dateien. Derzeit ist es allerdings aus Sicherheitsgründen nicht möglich, aus dem Applet auf die Festplatte zu speichern, was natürlich den Nutzen des Applets leider einschränkt.

#### Erfahrungen aus dem Unterricht

Der Autor verwendet seit 1994 Unterrichtssoftware zur Raumgeometrie im Rahmen des Fachs „Anwendungen der Mathematik“ in der Sekundarsufe II, wo an Schweizerischen Gymnasien in der Regel zumindest noch eine Einführung in konstruktive Raumgeometrie erfolgt. Im ersten Semester zeichnen die Schüler vornehmlich von Hand in axonometrischen Darstellungen und lösen dabei einfache Lage-Aufgaben zu Schnitt- und Parallelenelementen. Ausblicke in andere Projektionsarten (z.B. Zentralprojektion) und weiterführende Operationen (z.B. Normalenprobleme) werden allenfalls in einem zweiten Semester behandelt.

Anspruchsvollere Aufgaben zur Lage können mit dieser schmalen Dotation kaum mehr von Hand bewältigt werden. Als Beispiel sei an dieser Stelle die Konstruktion der kürzesten Verbindungsstrecke zweier Geraden (Minimal-transversale) genannt, welche im wesentlichen auf der Konstruktion einer Normalen zu einer Ebene beruht. Diese Standardaufgabe, welche man auch in der analytischen Geometrie oft antrifft, wurde

bis vor kurzem mit den Mitteln der Darstellenden Geometrie in Grund- und Aufriss gelöst. Da das Zweitafelverfahren aber immer mehr an Bedeutung verliert und höchstens noch in den Grundzügen unterrichtet wird, drängt sich bei solchen Aufgaben der Einsatz einer Software zur konstruktiven Raumgeometrie auf.

Im Vordergrund steht zunächst das Skizzieren der gewünschten Konfiguration und eine Analyse der nötigen Konstruktionsschritte, welche dann im Programm eingegeben werden können. Ist die Aufgabe schliesslich gelöst worden, sollte eine Überprüfung der Korrektheit stattfinden. Dazu bietet eine geeignete Software verschiedene Möglichkeiten. Im Falle der Minimaltransversalen kann man z.B. mit dem einleitend erwähnten 3D-Geometer Winkel messen und die Konstanz von rechten Winkeln feststellen. Mit GeometerPRO wird es möglich sein, durch die Echtzeit-Veränderung der Projektionsrichtung die rechten Winkel zwischen der Minimaltransversalen und den beiden gegebenen Geraden zu beobachten, indem man mit der Maus geeignet umprojiziert, bis die gewünschte Lage eintritt. Wie in planimetrischen Systemen können auch Zahlwerte von Messungen in die Graphik integriert werden, welche ebenfalls dem Zugmodus unterliegen, so dass rechte Winkel auch wirklich als solche erkannt werden.

Insgesamt scheint es, dass nicht zuletzt die massiv verkürzte Unterrichtszeit in konstruktiver Raumgeometrie zu einem vermehrten Einsatz von Software gesorgt hat. Dadurch ist der Schüler immer noch in der Lage, anspruchsvolle Problemstellungen ohne Substanzverlust zu bewältigen. Die Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens dürfte zudem eher stärker gefördert werden, da man sich auf die raumgeometrischen Inhalte konzentrieren kann und sich nicht primär mit Darstellungsproblemen herumschlagen muss.

### Empfohlene Links

[www.geosoft.ch](http://www.geosoft.ch) (Einstiegsseite für Geometrie-Software von H. Klemenz)  
[www.geosoft.ch/geometer](http://www.geosoft.ch/geometer) (Seite von GeometerPRO ab Herbst 2001)