Heinz Schumann

Eine computergrafische Behandlung geometrischer Körper

1 Einleitung

Welche wesentlichen Forderungen sind an ein computergrafisches Werkzeug zu stellen, das in dem von der Behandlung geometrischer Körper geprägten Raumgeometrie-Unterricht der Sekundarstufe I eingesetzt werden kann?

– Als Visualisierungswerkzeug soll es u.a. gestatten, die Standardkörper der Schulgeometrie und außerdem die aus diesen Körpern gewonnenen Körper so zu betrachten, als hätte man die Körper als Kanten-, Flächen- oder Vollkörpermodelle in der „Hand“. (Das wird durch das sog. *Virtual Sphere Device* geleistet, bei dem jedem Körper eine virtuelle Kugel umbeschrieben wird, die mit der Maus beliebig bewegt werden kann.)
– Es getattet die direkt manipulative Größenänderung (d. h. die äquiforme Verkleinerung bzw. Vergrößerung) und Lageänderung der Körper.
– Es bietet eine vielfache Auswahl an Körperdarstellungen.
– Es soll den Übergang zur taktilen Wahrnehmung der auf dem Bildschirm nur visuell wahrnehmbaren Körper ermöglichen. (Das geschieht durch den Ausdruck von Körpernetzen und deren anschließende Auffaltung, was natürlich nicht für die Kugel und ihre Teile geht.)
– Es soll als Messwerkzeug auf vielfältige Weise erlauben, die Metrik eines Körpers zu studieren und die Ausgabe der wahren Form von Objekten, die sich auf und im Körper befinden, zulassen.
– Als Konstruktionswerkzeug soll es gestatten, auf flexible Weise neue Körper durch Zerlegen, Zusammensetzen, Rotieren und Deformieren zu erzeugen. Außerdem soll das Einzeichnen von Figuren in und auf die Körper möglich sein, um diese zu Trägern weiterer geometrischer Information zu machen.

Das Windowsprogramm KÖRPERGEOMETRIE (Bauer et al. 1999), erfüllt weitgehend die genannten Forderungen, es kann deshalb dienen

– der Visualisierung und Demonstration körpergeometrischer Sachverhalte;
– der Unterstützung der Formenkunde, der konstruktiven Darstellung, der Berechnung und der Erzeugung geometrischer Körper;
– der Entwicklung und dem Trainings der Raumvorstellungsfähigkeit (hier: Fähigkeit, sich räumliche Objekte und Beziehungen zwischen räumlichen Objekten vorzustellen);
– der experimentellen Erkenntnisfindung (Entdeckung geometrischer Aussagen, Erzeugung neuer Körper etc.)
– der Verstärkung kreativen Arbeitens durch raumgeometrisches Explorieren (z.B. bei der Bearbeitung offener Aufgaben).

Wir wollen hier in die Benutzung des Computerwerkzeugs KÖRPERGEOMETRIE einführen, indem wir die vorstehenden den Raumgeometrie-Unterricht unterstützenden Möglichkeiten bei der Behandlung eines ausgewählten Körpers realisieren.

Es sind dabei zwei Ebenen des raumgeometrischen Arbeitens zu unterscheiden: die „Werkzeugebene“, auf der u. a. visualisiert, erzeugt, konstruiert, variiert, abgebildet, gemessen und abgefaltet wird. Diese Ebene bildet die induktive Basis für die „Begründungsebene“, auf der Begründungen für die beobachteten Phänomene, also Beweise für formenkundliche Eigenschaften und Herleitungen von Anzahl- bzw. Berechnungsformeln zu geben sind. Umgekehrt dient die Werkzeugebene der Konkretisierung bzw. Veranschaulichung theoretischer Sachverhalte. Aus Platzgründen müssen wir uns hier auf die Werkzeugebene beschränken. Aus diesem

Grund können wir auch nicht auf die Interaktion der computerrepräsentierten Darstellungsform mit den anderen medienspezifischen Darstellungsformen eingehen.
In einer herkömmlichen Lernumgebung sind im Allgemeinen Elemente der Begründungsebene vorauszusetzen, um auf der materialen Werkzeugebene tätig werden zu können. Sicherlich lässt sich auch eine Lernumgebung gestalten, in der die elektronischen Modelle alle materialisiert vorliegen. Der Leser / die Leserin möge aber den mit ihrer Gestaltung verbundenen materialen und zeitlichen Aufwand sowie das Problem der Sicherung und der Reproduktion der Modelle für eine künftige Verwendung bedenken. Im übrigen verfolgen wir implizit das allgemeine Bildungsziel "Der Schüler / die Schülerin bzw. der Lehrer / die Lehrerin soll lernen mit dem Computer zu arbeiten". Vielleicht regt die Lektüre dieses Beitrags den Leser / die Leserin an, selbst Erfahrungen im Umgang mit dem neuen computergrafischen Medium zu sammeln. Denn wir sind der Meinung, dass die grundsätzliche Beherrschung eines leistungsfähigen raumgeometrischen Computerwerkzeugs zur medientechnologischen Kompetenz von Mathematiklehrern und -lehrerinnen gehört. Wie jedes differenziertere Werkzeug, so benötigt man auch bei der Nutzung von KÖRPERGEOMETRIE eine angemessene Zeit für die Einarbeitung, um die zahlreichen Optionen in ihrem Zusammenspiel kennen und beherrschen zu lernen. Die explizite Beschreibung der Handhabung der verwendeten Optionen müssen wir hier aus den o.g. Gründen aussparen.

2 Computergrafische Behandlung eines Körpers

Vorbemerkungen

–Wir wählen für die Behandlung den Rautenzwölfflächner aus, weil er ein ästhetisch wirkender Körper ist, dessen Seitenflächen kongruent aber nicht regelmäßig sind und weil er vielfältige Untersuchungsmöglichkeiten bietet.

–Das Thema eignet sich für ein raumgeometrisches Projekt in Klasse 9/10.

–Printmedien sind leider ein wenig geeignetes Medium, um die Interaktion und die Ergebnisse des Arbeitens mit einem computergrafischen Werkzeug adäquat zu dokumentieren.

Erzeugen

Wir gehen aus von einer Doppelpyramide, die aus zwei gleichen quadratischen Pyramiden besteht, deren Höhen gleich der halben Grundkante sind (Abb. 1). Diese Doppelpyramide kann man aus einem Würfel herausschneiden (Abb. 2) oder auch durch Vorgabe der Längen von Grundkante und Höhe in KÖRPERGEOMETRIE erzeugen lassen.
Auf der Oberfläche zeichnen wir mittels Kantenmittelpunkten Rauten ein (Abb. 3) und gewinnen so einen Plan, wie die Doppelpyramide zu bearbeiten ist, um einen Körper mit rautenförmigen Flächen herzustellen. Die ausgeführten Schnitte zeigt die Abbildung 4; der Körper mit den Schnitten kann durch Drehen von allen Seiten betrachtet werden. Die vier abgeschnittenen Ecken werden weggezogen und der "Kern" wird automatisch abgefaltet (Abb. 5). Man erkennt am Netz zwölf einander kongruente Rauten (Warum sind diese kongruent? Welches Verhältnis haben die Diagonalen der Raute? Usw.). 11 einfach und 26 halb zu zählende ergeben insgesamt 24 Kanten; von oben nach unten zählt man 14 Körperecken. Diese Anzahlen hätte man bei der Planung an der Doppelpyramide vorwegnehmend bestimmen können. Generell leiten sich aus den Eigenschaften und der Metrik der Doppelpyramide die des Rautenzwölfflächners her.
Dieser Körper wird auch Rhombendodekaeder genannt. Für eine Informationssuche im Internet braucht man noch die englische Bezeichnung: Rhomdic Dodecahedron.

Visualisieren und material verfügbar machen
Die abgeschnittenen Ecken werden entfernt. Jetzt soll das Rautenzwölfflach taktil verfügbar gemacht werden: Ein automatisch oder individuell erzeugtes Netz wird ausgedruckt, ausgeschnitten, aufgefaltet und z.B. mit Tesafilm fixiert. Mit einer Rautenfläche als Klapppfenster kann man auch in das Innere des Papiermodells hineinschauen. Wir drehen nun das Bildschirmmodell mit der Maus in besondere Lagen. In Abbildung 6 steht es auf einer 4-kantigen, in Abbildung 7 auf einer 3-kantigen Ecke; in Abbildung 8 auf einer Kante und in Abbildung 9 auf einer der Seitenflächen. (Der Körper kann auch so gedreht werden, dass er als Quadrat oder regelmäßiges Sechseck erscheint.) Die Abbildung 10 zeigt einen gegenständlich wirkendes Modell mit verschieden gefärbten Seitenflächen. Die Färbung ist hilfreich, wenn man z.B. den Körper individuell abfalten möchte. In der Abbildung 11 ist der

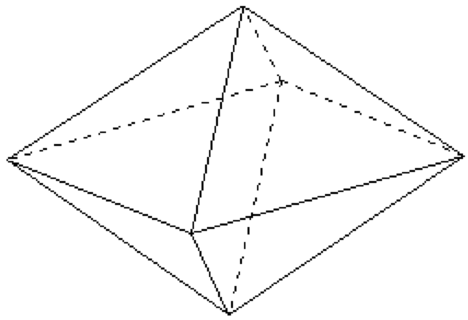


Abb. 1

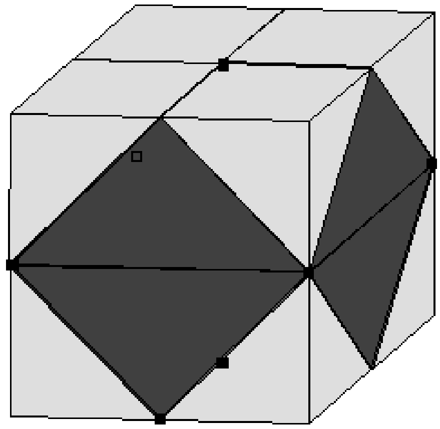


Abb. 2

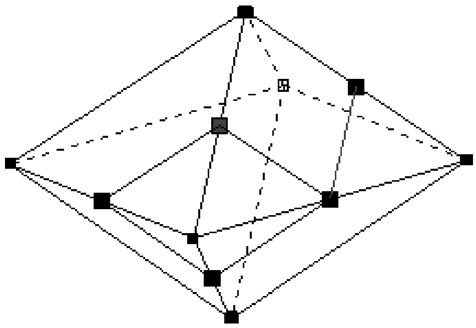


Abb. 3

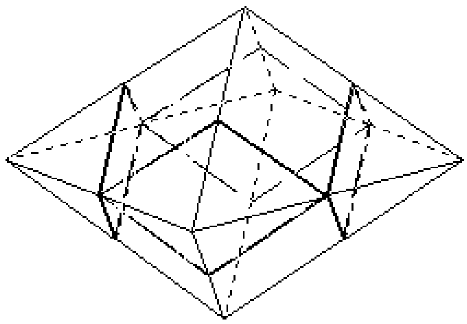


Abb. 4

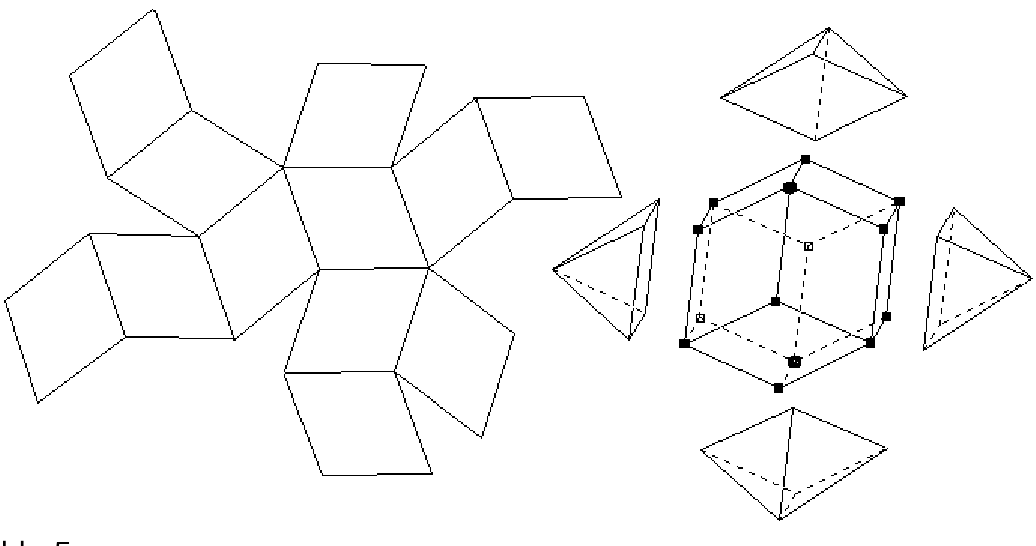


Abb. 5

Körper in Beleuchtung dargestellt. Neben den hier verwendeten parallelprojektiven Darstellungen kann auch auf eine zentralperspektive Darstellung (Abb. 12) umgeschaltet werden, die zwar vereinfacht unserer augenscheinlichen Wahrnehmung entspricht, sich aber für das Explorieren der Körpereigenschaften wenig eignet. Eine weitere Visualisierungsmöglichkeit ist durch die Dreitafelprojektion gegeben, die durch Verebnen einer räumlichen Ecke gewonnen wird (Abb. 13/14).

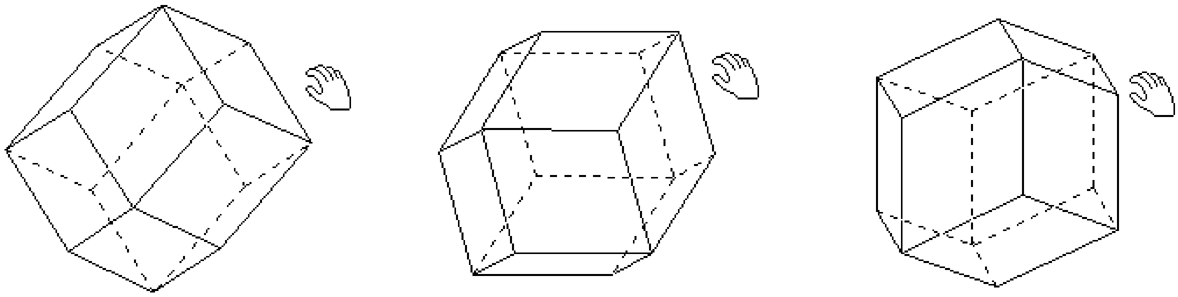


Abb. 6 - 8

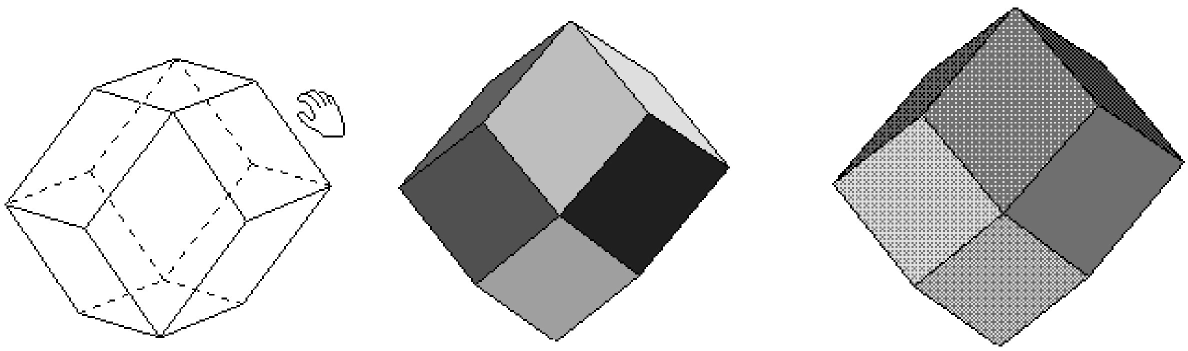


Abb. 9 - 11

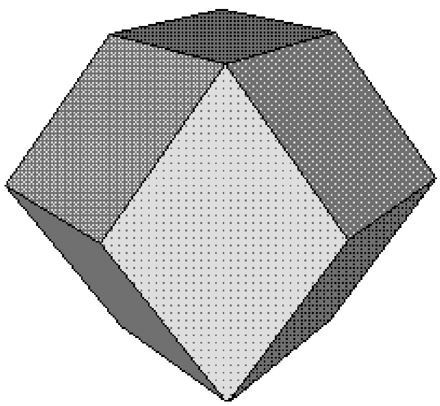


Abb. 12

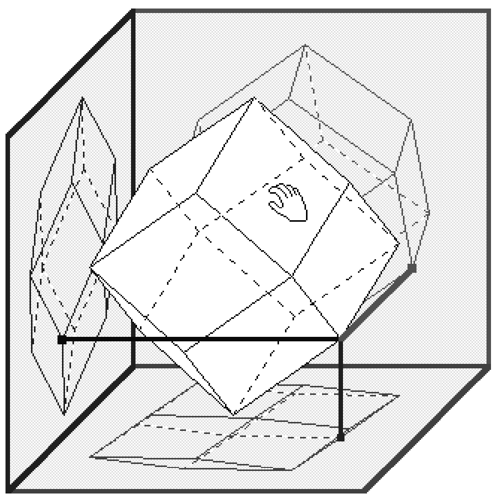


Abb. 13

Zählen und messen

Nähere Betrachtung der Ecken und Kanten: Es gibt sechs 4-kantige und auch 3-kantige Ecken; in jeder 3-kantigen Ecke stoßen drei stumpfe und in jeder 4-kantigen Ecke vier spitze Rautenwinkel zusammen (Den spitzen Rautenwinkel lassen wir messen, vgl. Abbildung 15; sein Maß wird mit 70,5° angegeben (Was ist sein exakter Wert?). Jede Kante verbindet eine 3-kantige mit einer 4-kantigen Ecke; die Menge der Kanten besteht aus vier Teilmengen zu je sechs parallelen Kanten. Die Flächen stoßen an einer Kante unter 120° zusammen, das ergibt eine entsprechende Messung (Abb. 16, Begründung?). Beim Überfahren des Körpers mit der Maus werden die Längen der

Kanten und die Inhalte der Seitenflächen angezeigt. Für die Kantenlänge 2.0 LE wird von KÖRPERGEOMETRIE ein Volumen von 24,4 VE und eine Oberfläche von 45,0 FE angezeigt. (Herleitung der Formeln für das Volumen und für die Oberfläche in Abhängigkeit von der Kantenlänge des Rhombenzwölfflächners?).

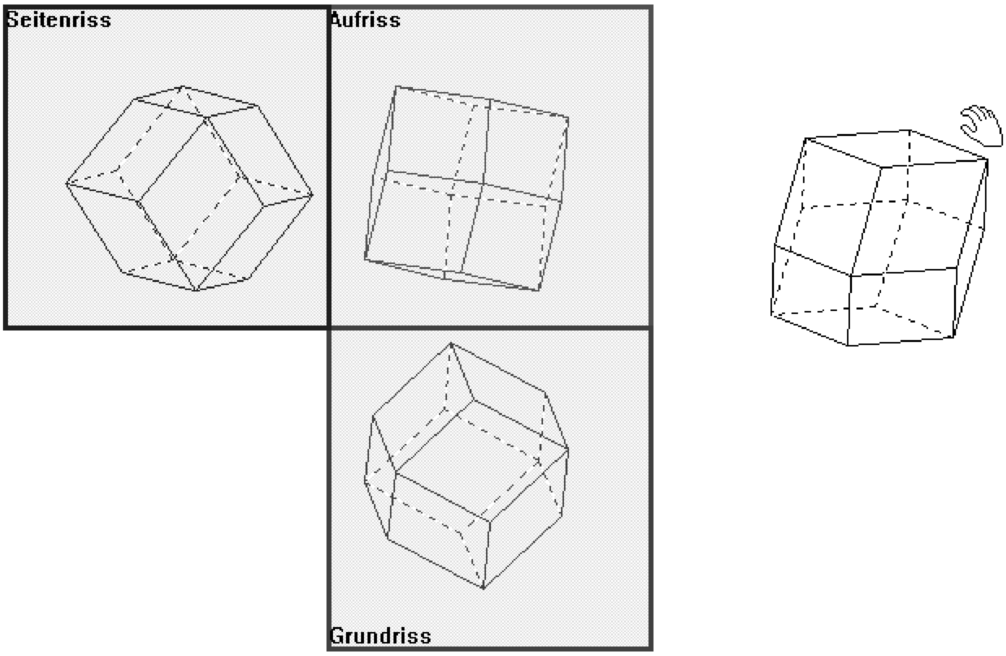


Abb. 14

Objekten auf und im Körper konstruieren

Wir zeichnen zuerst Raumdiagonalen: Von einer vierkantigen Ecke gehen fünf Raumdiagonalen aus, davon sind vier einander gleich (Abb. 17); von einer dreikantigen Ecke sind es sieben Raumdiagonalen, davon sind zweimal drei einander gleich (Abb. 18). Die Anzahl aller Raumdiagonalen beträgt 43. Es gibt vier verschiedene Klassen von Raumdiagonalen unterschiedlicher Länge, deren

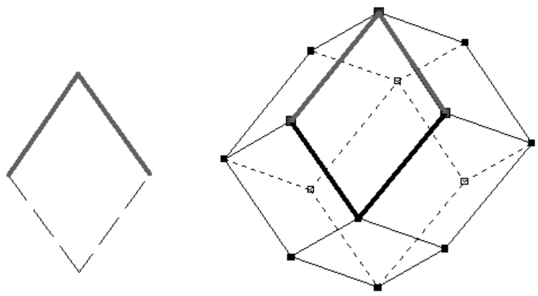


Abb. 15

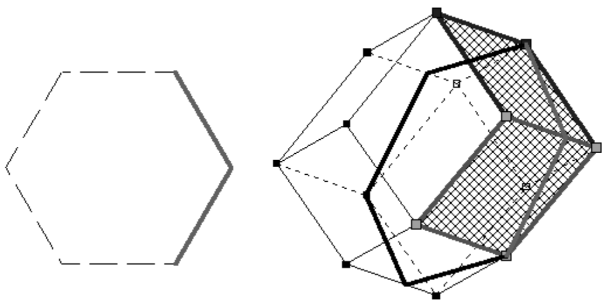


Abb. 16

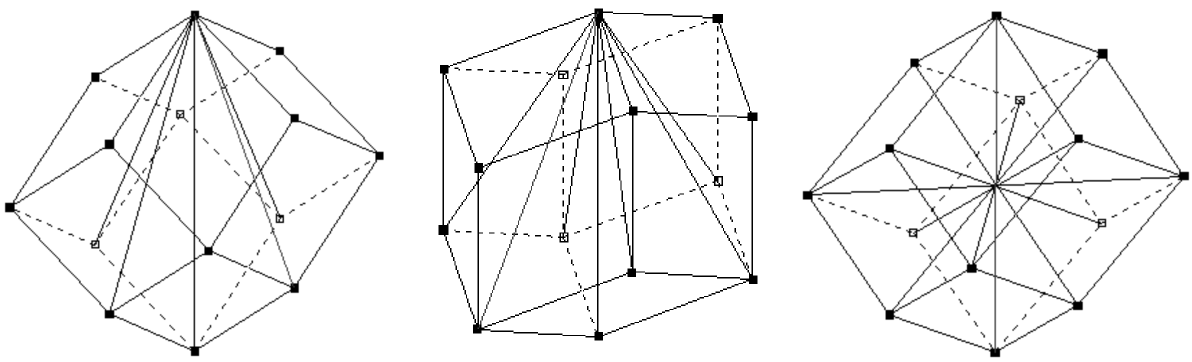
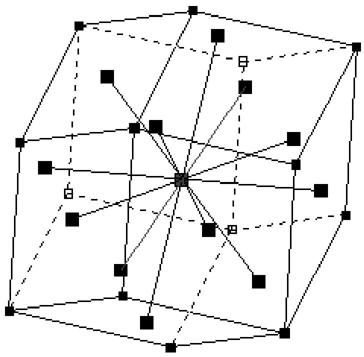


Abb. 17 - 19



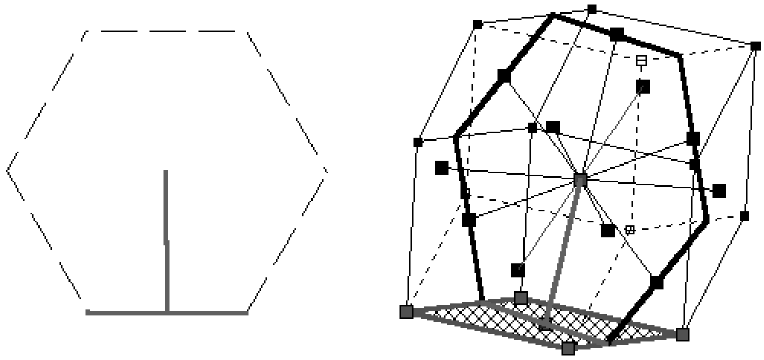
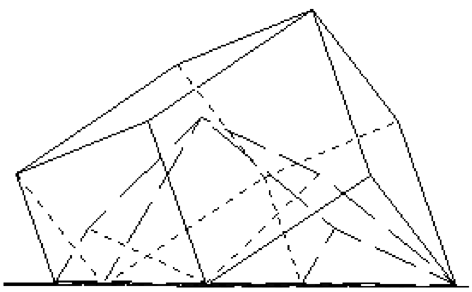


Abb. 20 Abb. 21

Berechnung wieder mit Rückgriff auf unseren Ausgangskörper Doppelpyramide vorgenommen werden kann. Welche der Raumdiagonalen sind Symmetrieachsen? (Bei Rotation um eine als Rotationsachse ausgezeichnete Raumdiagonal darf dieser nicht „eiern".) Die Raumdiagonalen, die diametrale Ecken verbindet zeigt die Abbildung 19. Da die Verbindung diametral liegender dreikantiger Ecken kürzer als die Verbindung gegenüberliegender vierkantiger Ecken ist, kann es keine Umkugel geben. Wir prüfen, ob eine Inkugel existieren kann. Dazu verbinden wir die Mitten gegenüberliegender Seitenflächen (Abb. 20) und messen, ob diese Verbindungsstrecken senkrecht („normal") auf den Seitenflächen stehen (Abb. 21). Es existiert also eine Inkugel, deren Einzeichnung in KÖRPERGEOMETRIE nicht möglich ist.
Welche Arten von Diagonalebenen werden durch Raumdiagonalen aufgespannt und wieviele gibt es insgesamt und von jeder Art? Welche der Diagonalebenen sind Symmetrieebenen? (Das Spiegelbild eines der Körperteile muss mit dem anderen zur Deckung kommen, was z. B. in Abbildung 22 nicht der Fall ist.) In Abbildung 23 sind körperhalbierender Schnitte zu sehen; die erste Halbierung führt auf die Form eines Rautendachs. – In welchen Polygonformen schneiden die Diagonalebenen jeweils die Oberfläche des Körpers?



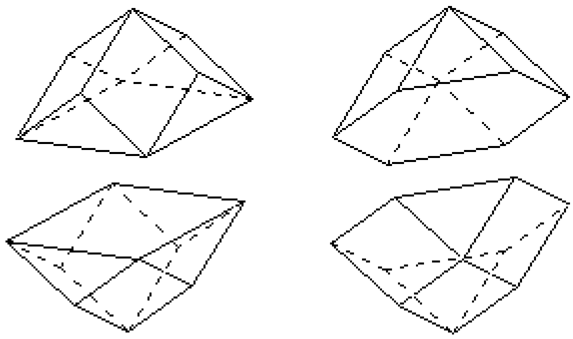


Abb. 22 Abb. 23

Wir wollen nun Schnittpolygone am Rautenzwölfflach untersuchen. So z.B. das Polygon, das durch entsprechende Ecken (vgl. Abb. 24) ein Quadrat bildet, was durch das Einblenden seiner wahren Form und/oder das automatische Rotieren in eine zur Bildschirmebene parallele Lage zu erkennen ist. Verschiebt man diesen Schnitt parallel bis er durch Kantenmitten geht, so nimmt er die Form eines regelmäßigen Achtecks an (Abb. 25). Legen wir einen Schnitt durch drei entsprechende Ecken (vgl. Abb. 26), so stellt sich seine Form als gleichseitiges Dreieck heraus; Parallelverschiebung führt zu einem regelmäßigen Sechseck (Abb. 27), das zu einem seitengleichen und achsensymmetrischen 9-Eck führt (Abb. 28). Gibt es ein Schnittpolygon mit einer noch größeren Anzahl von Ecken?

Einbeschreiben und zerlegen
Welche Körper können in ein Rautenzwölfflach einbeschrieben werden?
Ein Würfel kann einbeschrieben werden (Abb. 29). Welche Kantenlänge hat dieser? Die Abbildung 30 zeigt die ausgeführten Schnitte, mit denen man den Würfel herausschneidet. Es übertragen sich die Symmetrieeigenschaften des Würfels, wie auch die der anfänglichen Doppelpyramide auf das Rhombendodekaeder bzw. umgekehrt. Man kann sich unser Dodekaeder auch durch passendes Aufsetzen von sechs quadratischen Pyramiden, die von halber Höhe wie der Würfel sind, entstanden denken. Das sieht man auch so ein: Eine abgeschnittene Pyramide wird an der Schnittebene gespiegelt; ihre Spitze fällt mit dem Mittelpunkt des Würfels zusammen (Abb. 31).

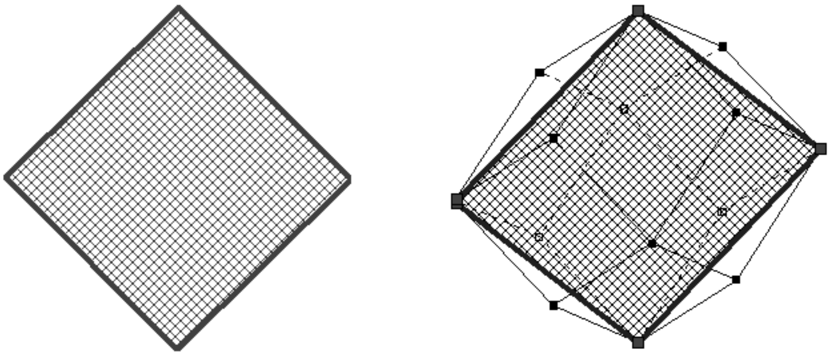


Abb. 24

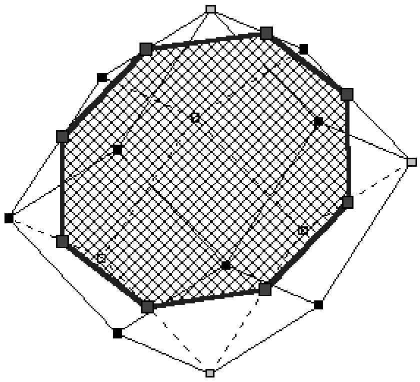


Abb. 25

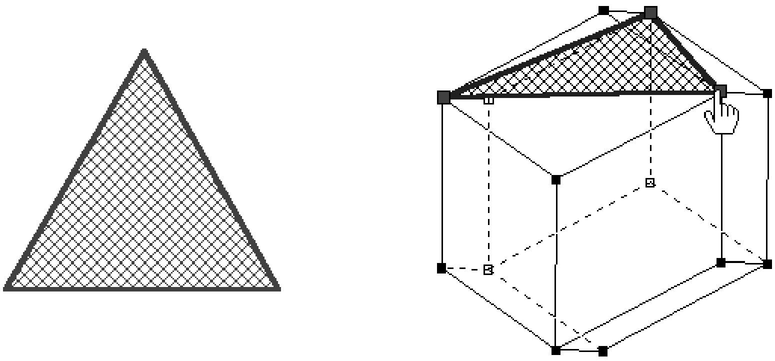


Abb. 26

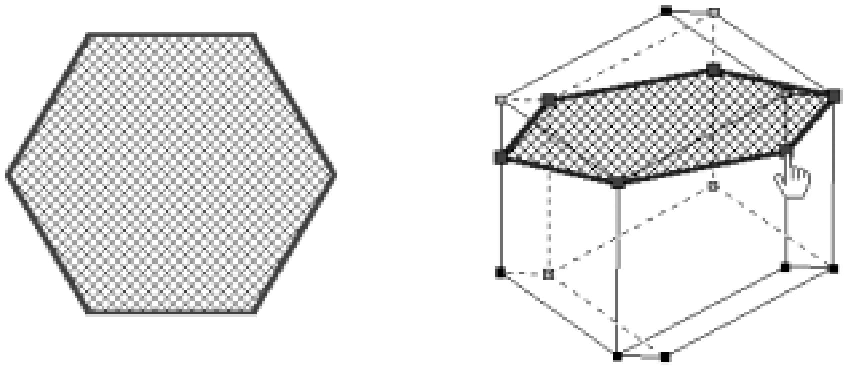


Abb. 27

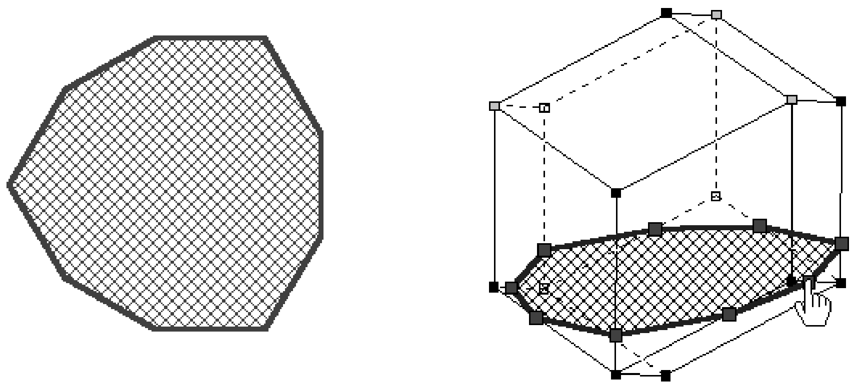


Abb. 28

Die Abbildung 32 zeigt eine entsprechende Explosionsdarstellung mit einem Würfelnetz. In Abbildung 33 werden die sechs Pyramiden zu einem Würfel gleicher Größe zusammengefügt. Das Volumen des Dodekaeders ist also gleich dem zweier kongruenter Würfel. (Puzzle: In einen Würfel aus acht solchen Würfeln müssten dann vier Dodekaeder hineinpassen. Wie sieht diese Füllung aus? Tipp: Drei der Dodekaeder müssen jeweils wie in Abbildung 34 zerlegt werden.) Außerdem lassen sich noch einbeschreiben: ein regelmäßiges Oktaeder (Abb.35 mit seinen "Schalen" und einem Netz); ein regelmäßiges Tetraeder (Abb. 36; mit Schalen und einem Netz); das Kuboktaeder (Abb. 37). Durch Ineinanderlagern zweier einbeschriebener regelmäßiger Tetraeder entsteht das Sternpolyeder mit dem Namen Stella octangula, das als referenzierbares Objekt nicht in KÖRPERGEOMETRIE dargestellt werden kann, da dieses Werkzeug nur die Erzeugung konvexer Körper unterstützt. Zusätzlich betrachten wir noch die Zerlegung des Rhombendodekaeders in vier kongruente Rhombenspate (Abb. 38), von denen wir eines herausschneiden (Abb. 39 mit Netz). Schließlich stumpfen wir die sechs vierkantigen Ecken des Rautenzwölfflachs bis zu den Kantenmitten und erhalten das sogenannte Rhombenkuboktaeder (Abb. 40, Abb. 41 mit weggezogenen Ecken, Abb. 42 mit Netz).

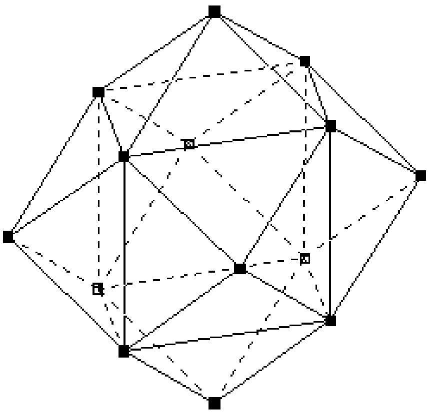


Abb. 29

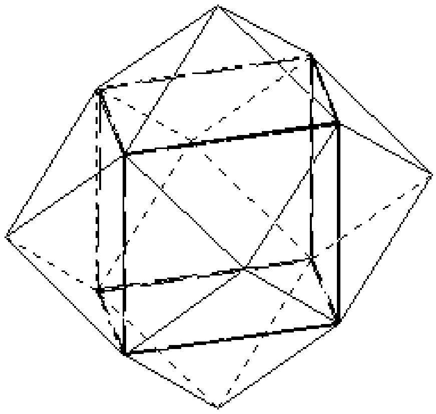


Abb. 30

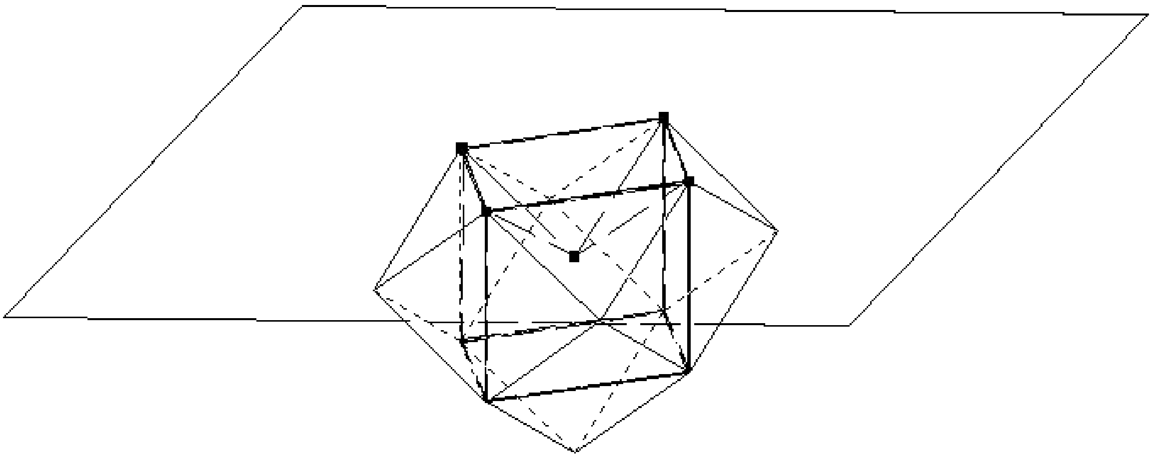


Abb. 31

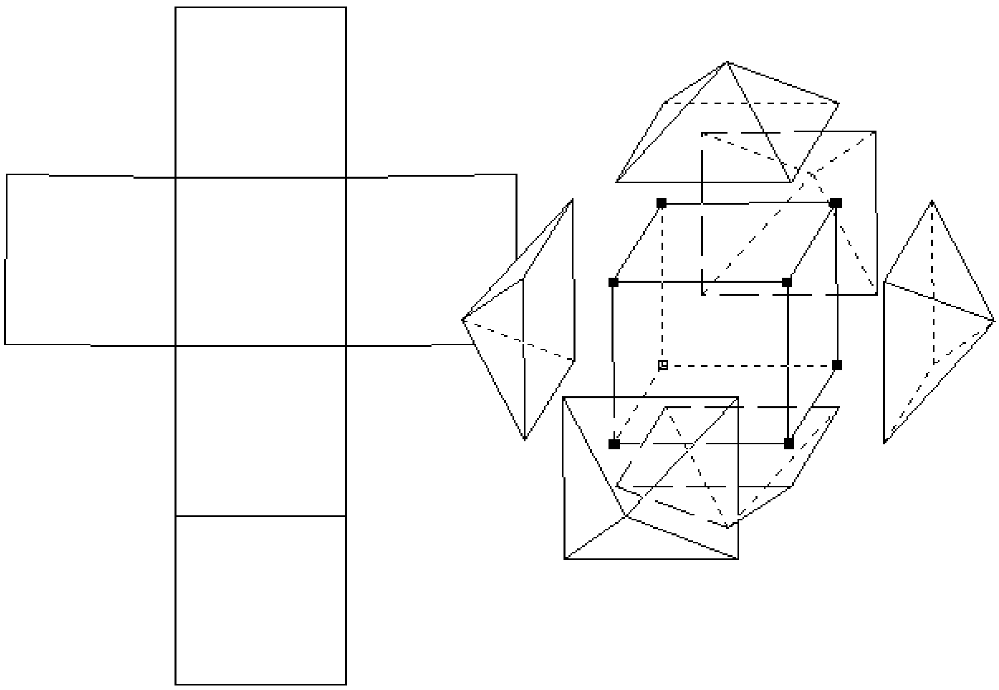


Abb. 32

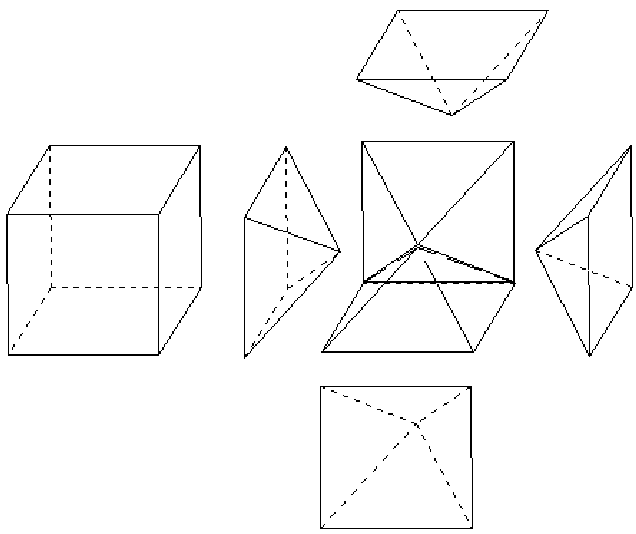


Abb. 33

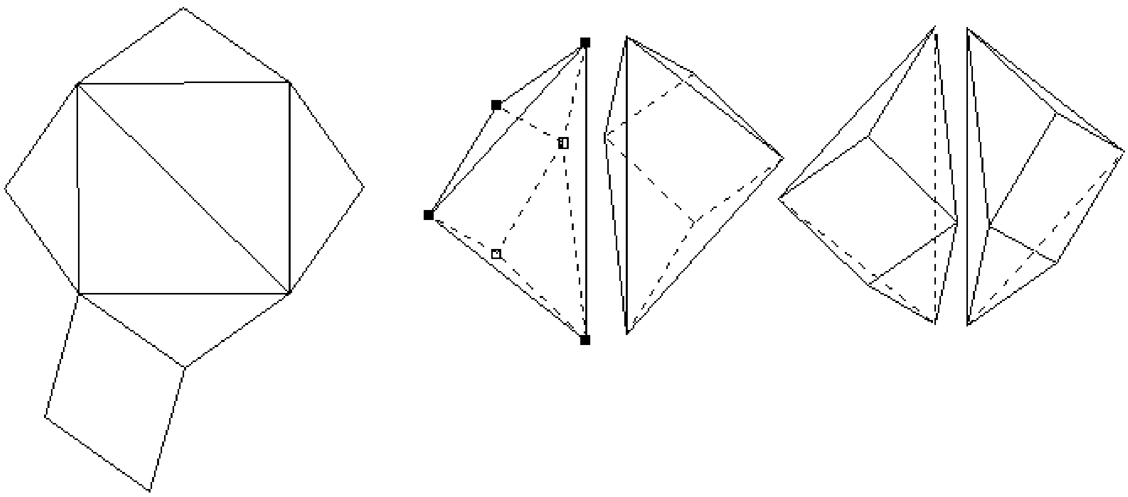


Abb. 34

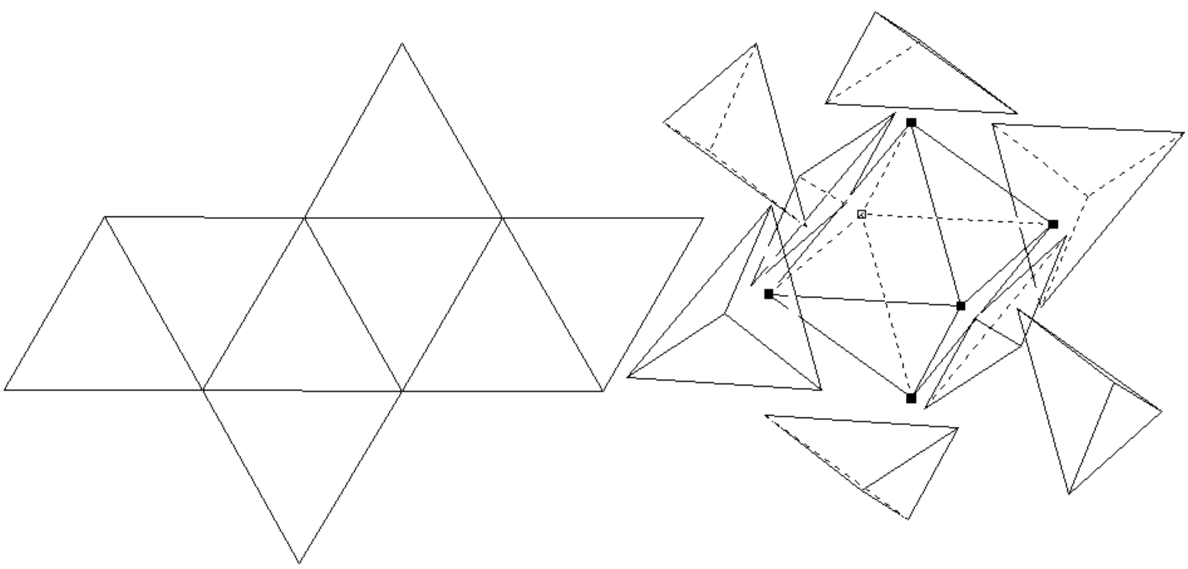


Abb. 35

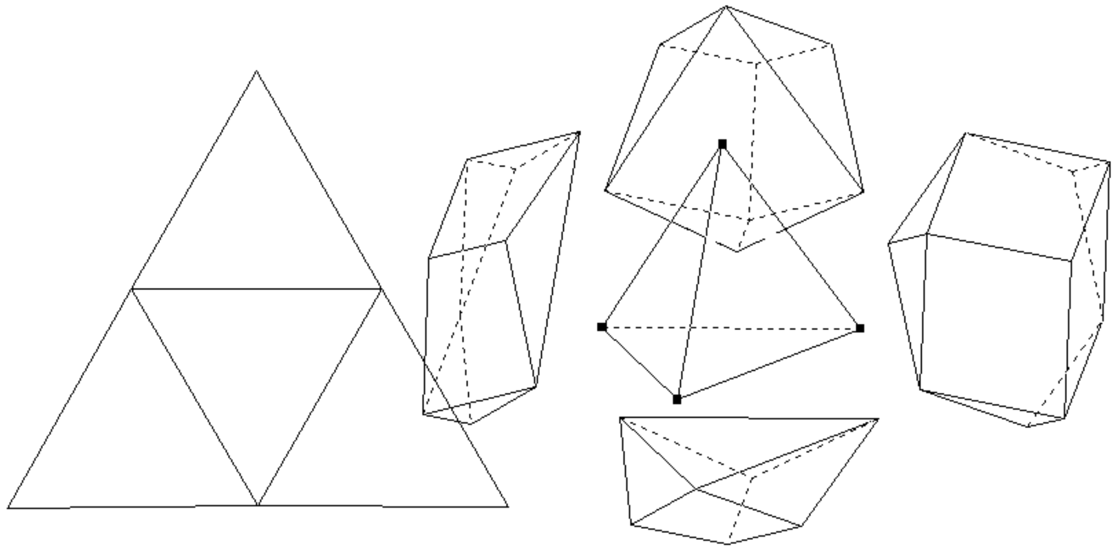


Abb. 36

Welche Kantenlängen, Höhen, Volumen- und Oberflächenformeln in Abhängigkeit von der Kantenlänge des Rhombendodekaeders haben diese Körper?

Zusammensetzen und füllen

Durch Zusammensetzen von kongruenten Rhombendodekaedern kann der Raum lückenlos gefüllt werden. Um das zu illustrieren, fügen wir z.B. fünf solche Dodekaeder zusammen (Abb. 43 und 44). Für Liebhaber: Welche verschiedenen, d.h. inkongruenten Raumformen lassen sich aus 3, 4, ... kongruenten Rautenzwölfflächnern

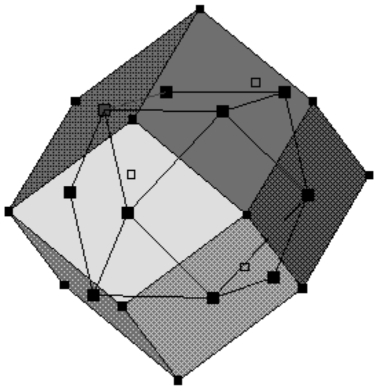


Abb. 37

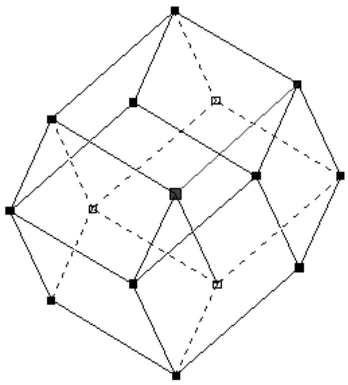


Abb. 38

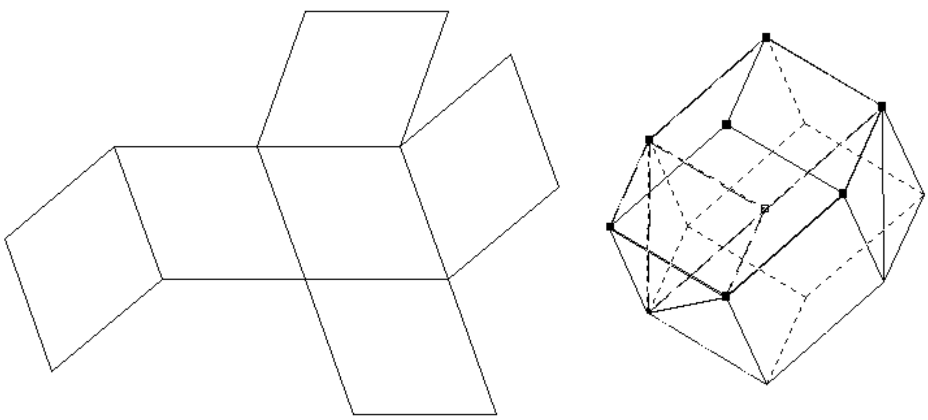


Abb. 39

durch passiges Aneinanderfügen bilden? Lösungen zeigt die Abbildung 45 (vgl. http://www.johnrausch.com/PuzzlingWorld/chap18b.htm). Solche Agglomerationen kommen als kristalline Formen in der Natur z.B. beim Rhodochrosit (Magnesium-carbonat) oder Granat vor.

Ausblick: Die Exkursion in die Welt des Rhombendodekaeders kann in zwei Richtungen fortgeführt werden: Welche anderen Zwölfflächner außer dem Rhombendodekaeder und dem regulären Pentagondodekaeder existieren noch? Oder, welche weiteren Körper, außer den Rautenspaten (Rhombenparallelepipeden), aus einander kongruenten Rauten gibt es? Um Teilantworten auf diese Fragen zu erhalten, benutzen wir das Internet.

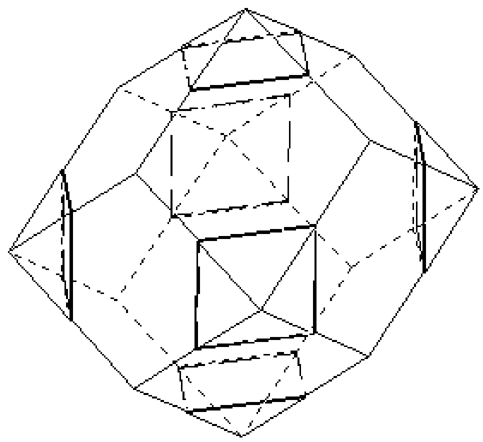


Abb. 40

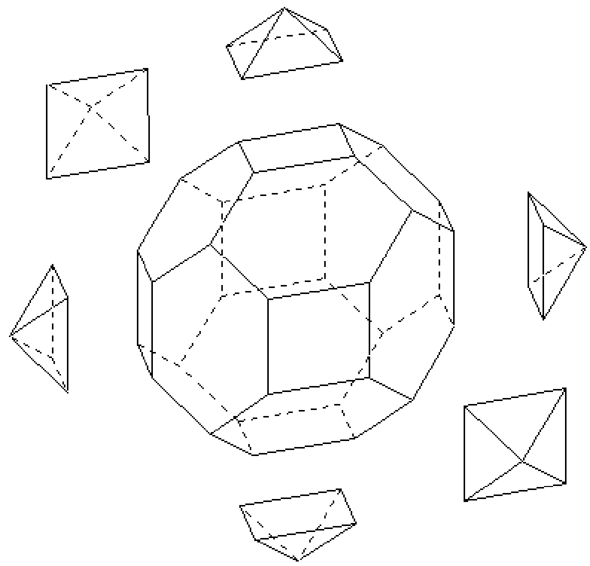


Abb. 41

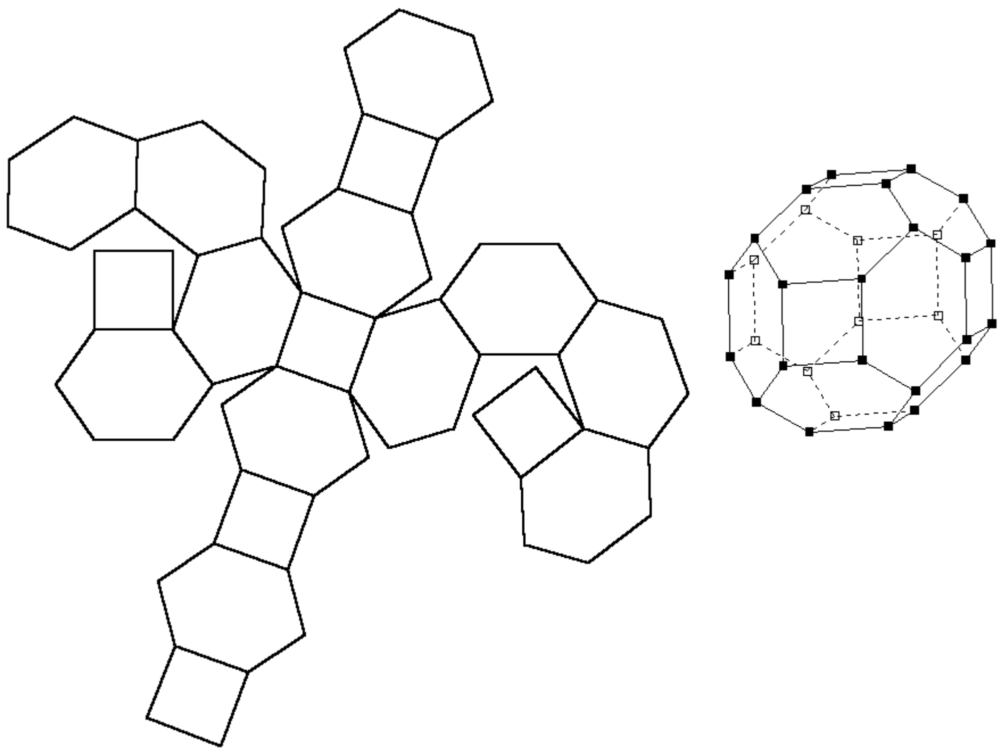


Abb. 42

Für das Suchwort „dodecahedra" findet Fireball ca. 722 Seiten (Stand Juli 2001), gleich unter den ersten zehn befindet sich die des Polyeder-ExpertenGeorge W. Hart (http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/dodecahedra.html) , die uns interessante Informationen liefert –oder man benutzt die Suchmaschine für die Webseiten von

George W. Hart: http://www.georgehart.com/search.html)

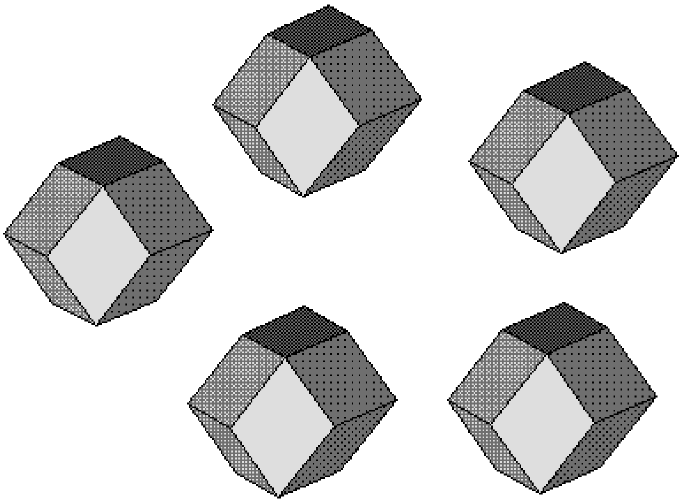


Abb. 43

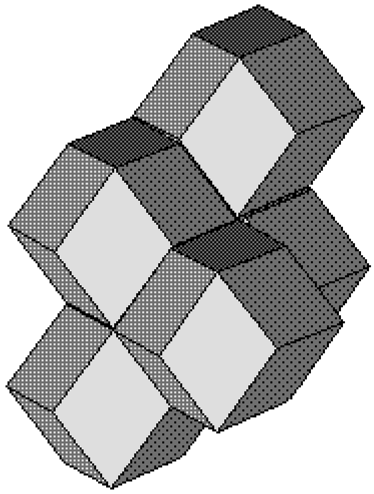


Abb. 45

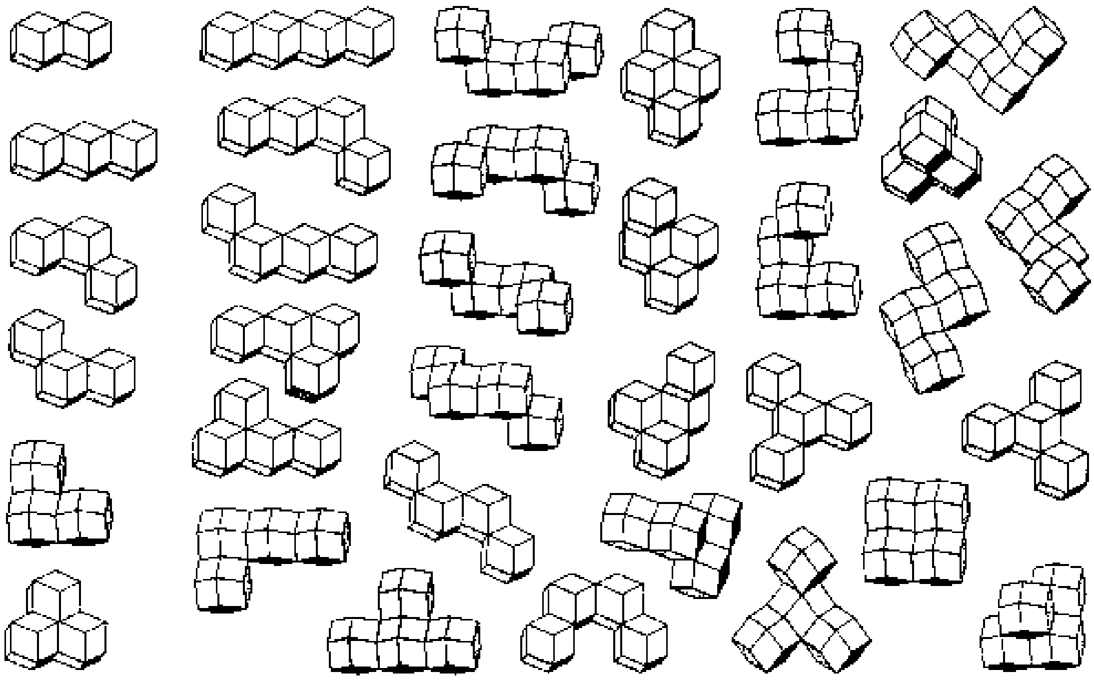


Abb. 46

3 Literatur

Bauer, H., Freiberger, U., Kühlewind, G. Schumann, H. (1999): KÖRPERGEOMETRIE (Software mit Manual). – Berlin Cornelsen

Schumann, H.(2000): Computerunterstütztes Lösen offener raumgeometrischer Aufgaben. – In: ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik Nr. 6, S. 175-185

Schumann, H.(2001): Raumgeometrie, Unterricht mit Computerwerkzeugen. – Berlin: Cornelsen