Heinz Schumann

Computerunterstütztes Verräumlichen ebener Figuren

1 Einleitung

Dem Modus des „Verräumlichens“ oder „Dreidimensional-Machens“ kommt im Raumgeometrie-Unterricht eine wichtige Brückenfunktion zwischen ebener und räumlicher Geometrie zu, die sowohl in der Anwendung, Übertragung und Analogisierung ebener geometrischer Sachverhalte als auch in der Entwicklung und Übung räumlichen Vorstellungsvermögens begründet ist.
Das Verräumlichen ebener Figuren als eine manipulative Tätigkeit bleibt im herkömmlichen Raumgeometrie-Unterricht im Wesentlichen beschränkt auf das Erzeugen von Körpermodellen aus materialisierten Kanten oder Flächenelementen (z.B. aus solchen polygonaler Form) oder aus elementaren Raumformen (z.B. würfelförmigen) nach vorgegebenem Dreitafelbild. (Das Generieren von Polyedermodellen oder anderen räumlichen Formen als Flechtwerke etc. ist eher von marginaler Bedeutung.) Das Verräumlichen als eine manipulative Schülertätigkeit erfordert einen nicht unerheblichen Material- und Zeitaufwand – mit dem Vorteil ganzheitlicher als auch taktiler Wahrnehmung.
In tutoriellen Lernumgebungen können die manipulativen Tätigkeiten mehr oder weniger effizient computergrafisch simuliert werden. So lässt sich das Auffalten materialer Körpernetze, das als ein taktiler Vorgang zum klassischen Standard des Verräumlichens gehört, durchaus direkt manipulativ auf dem Bildschirm computergrafisch realisieren (**Abb. 1**, für ein besonderes Netz des Würfels). Eine solche computerisierte Lernumgebung kann aber, was vor allem die Offenheit anlangt, nicht mit einer entsprechend materialisierten konkurrieren.

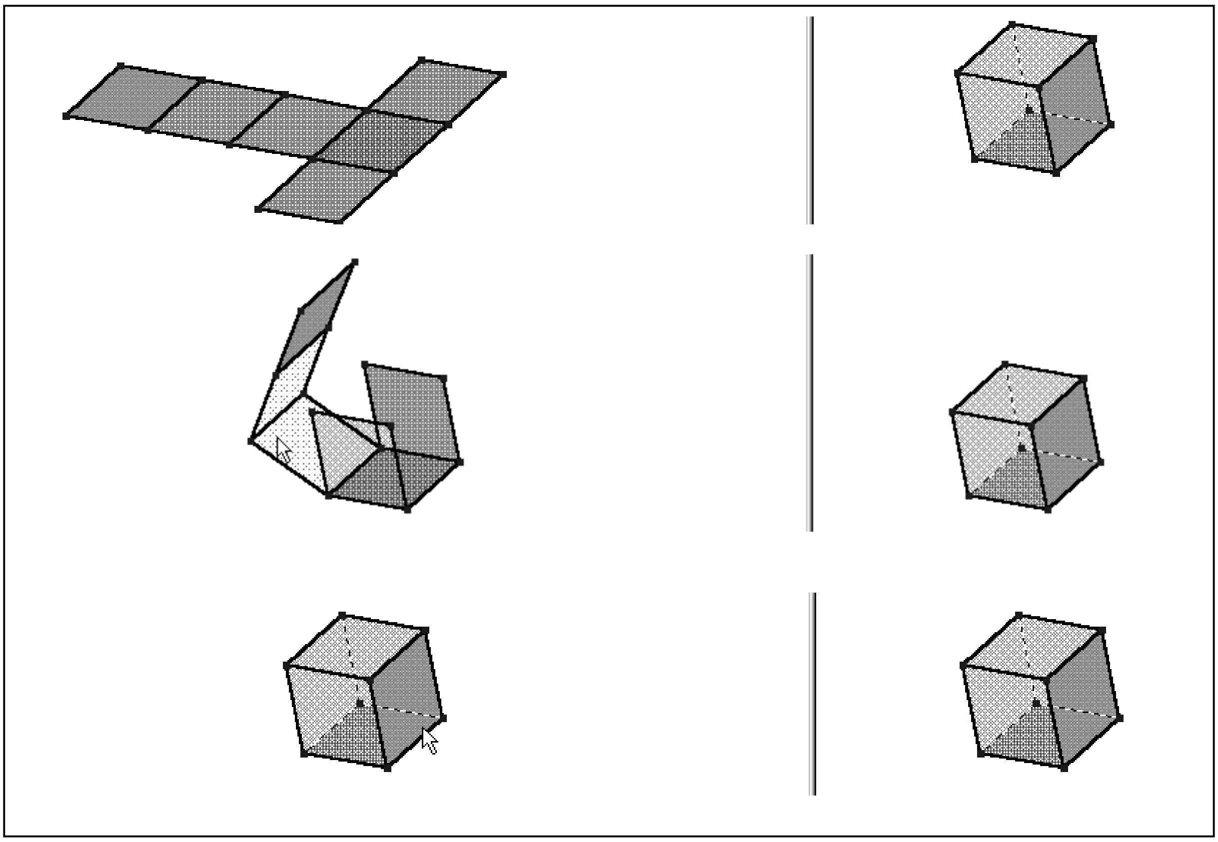

Abb. 1

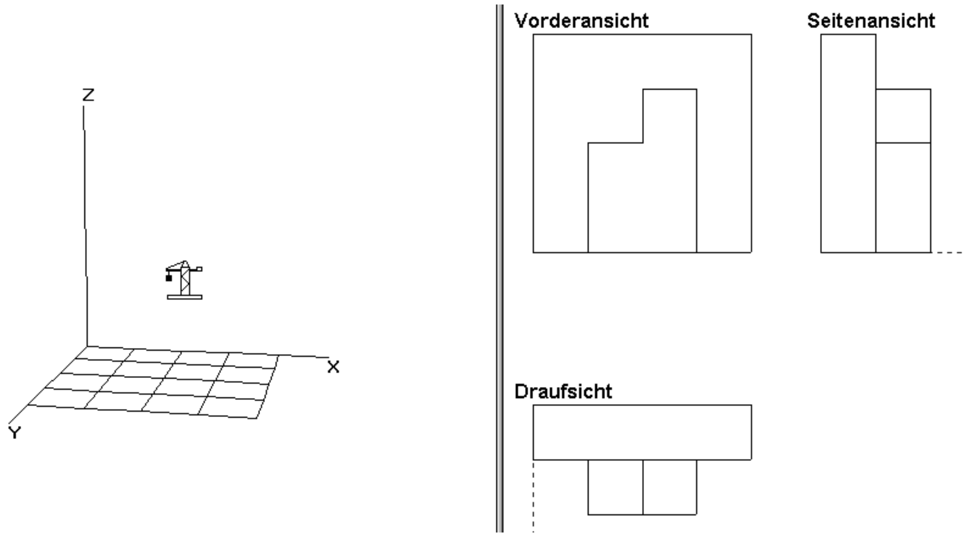

Abb. 2.1

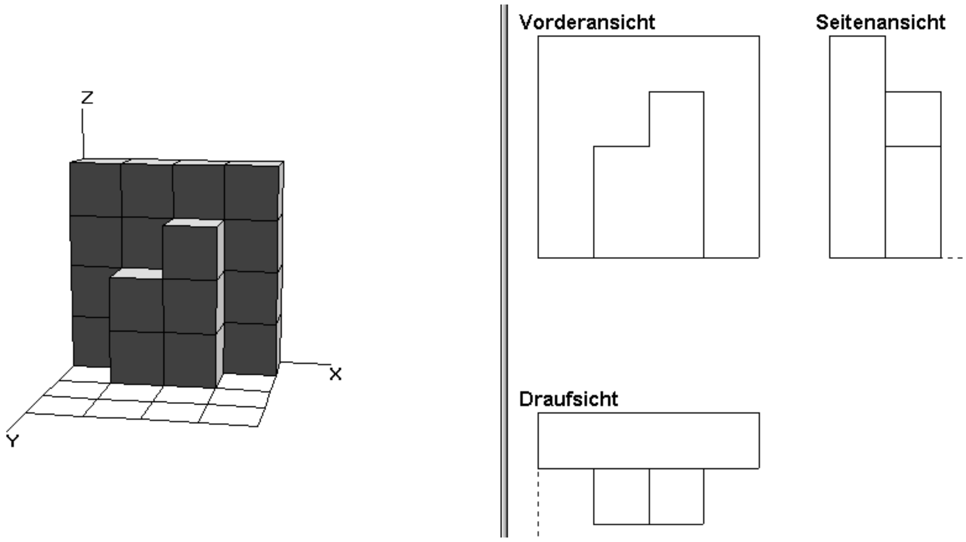

Abb. 2.2

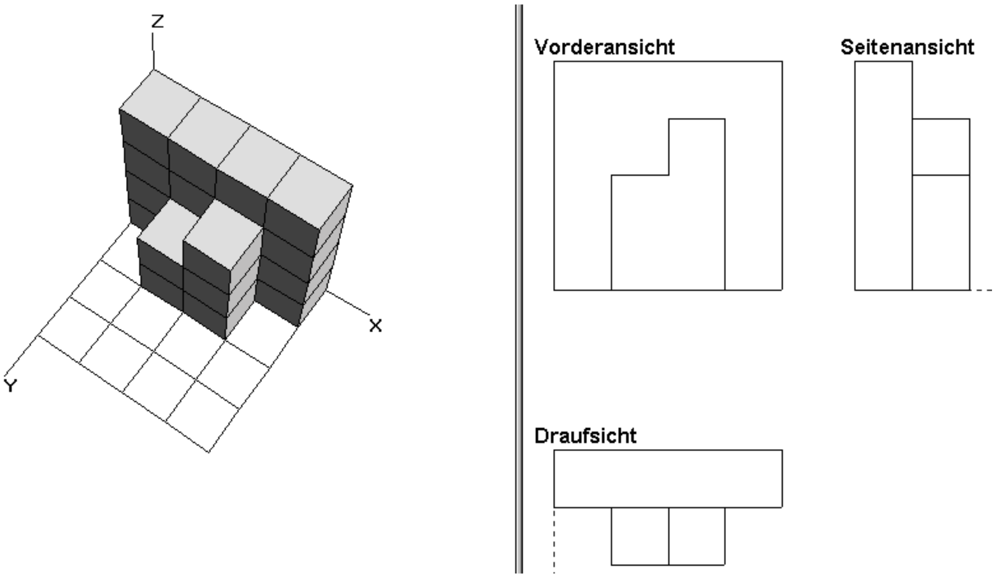

Abb. 2.3

Das Veranschaulichen von z.B. Rotationskörpern durch Rotierenlassen von ebenen Profilen um „Stricknadelachsen“ oder durch Aufblättern von Heften mit dem

Heftrücken als „Rotationsachse“ führt nicht auf Körpermodelle, allenfalls werden gewisse Vorstellungen von solchen Körpern und ihrer Entstehung geweckt.
Mit der Nutzung entsprechender computergrafischer Werkzeuge können wir die Möglichkeiten des Erzeugens von Körpern aus ebenen Figuren im Raumgeometrie-Unterricht erweitern oder auch wirksamer gestalten. (Das gilt ebenso für das „Verebenen“ als Umkehrung des „Verräumlichens“.) Die computerunterstützten Generierungsmöglichkeiten sind, inhaltlich gesehen, nicht neu; sie sind schon immer in Gestalt mentaler Vorstellungen angestrebt worden. Computergrafik liefert jetzt die adäquaten Visualisierungen im virtuellen Raum des Bildschirms. Da diese Art des Verräumlichens im Allgemeinen per Knopfdruck erfolgt, nennnen wir sie „automatisch“.

Im Folgenden zeigen wir an verschiedenen Beispielen automatisches computerunterstütztes Verräumlichen.

2 Beispiele für automatisches Verräumlichen

2.1 Vom Profil zum Rotationskörper

Die **Abbildung 3.1** zeigt ein kreisförmiges Profil mit einer Rotationsachse, das wir automatisch verräumlichen oder direkt-manipulativ zu einem facettierten Torus aufziehen (**Abb. 3.2** und **3.3**), um diesen dann von allen Seiten anzuschauen (**Abb. 3.4**). Das geht mit dem Werkzeug *KÖRPERGEOMETRIE* entsprechend für alle in der schulischen Raumgeometrie vorkommenden Rotationskörper.

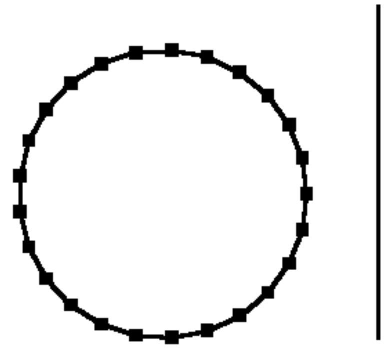

Abb. 3.1

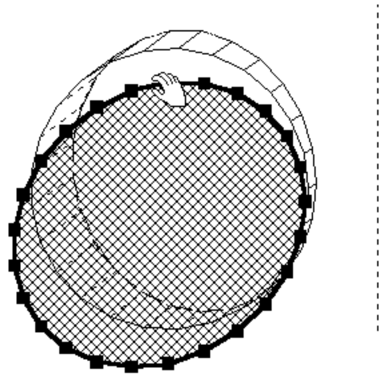

Abb. 3.2

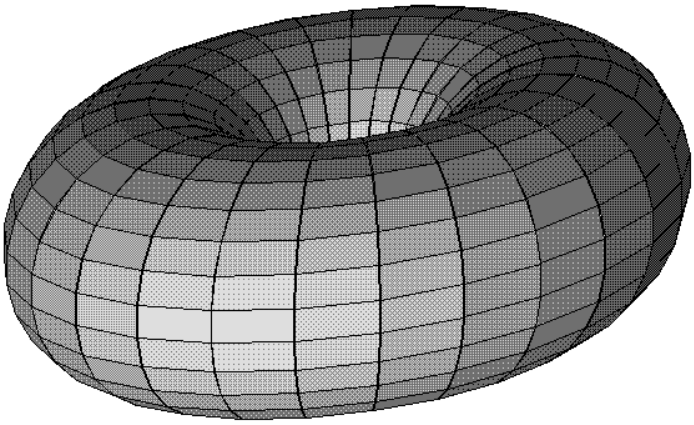

Abb. 3.3

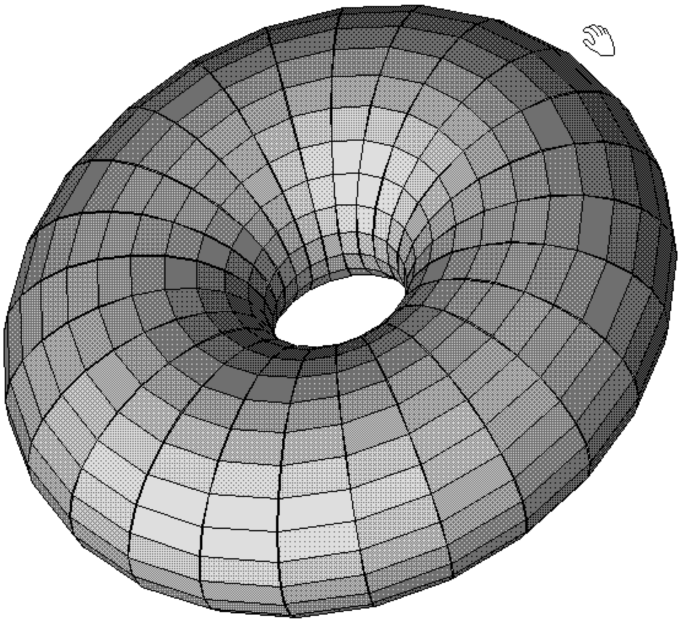

Abb. 3.4

2.2 Vom Vieleck zum Prisma

Wir zeichnen mit einem Low-Cost-3CAD-System (*CAD3-D*) ein ebenes Polygon (**Abb. 4.1**; ein nicht konvexes Sechseck in zentralprojektiver Darstellung) und verziehen (extrudieren) dieses in den Raum zu einem geraden Prisma (in **Abb. 4.2** noch als Draht- bzw. Kantenmodell; in **Abb. 4.3** als durch Beleuchtungseffekte plastisch wirkendes Körpermodell), das durch Drehen von allen Seiten betrachtet werden kann (**Abb. 4.4**).

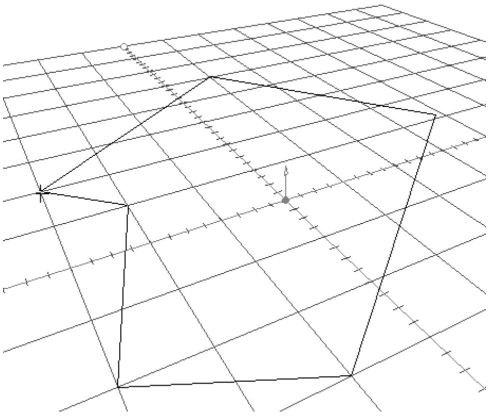

Abb. 4.1

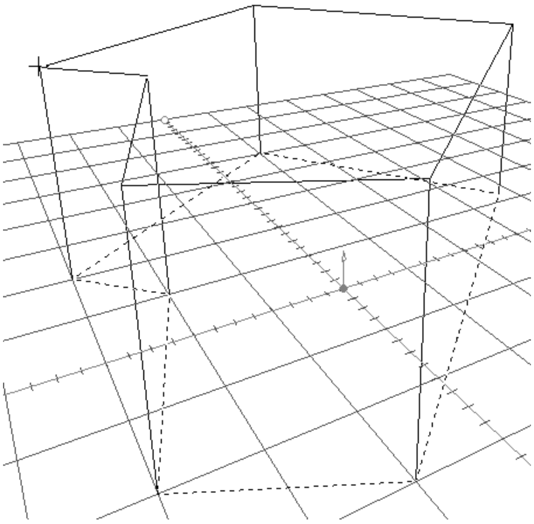

Abb. 4.2

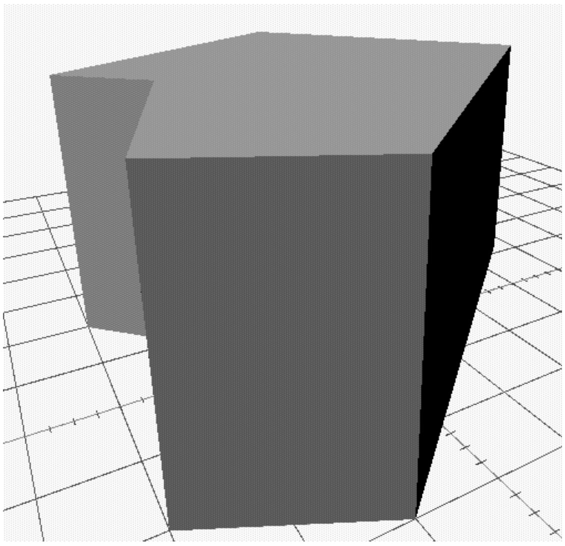

Abb. 4.3

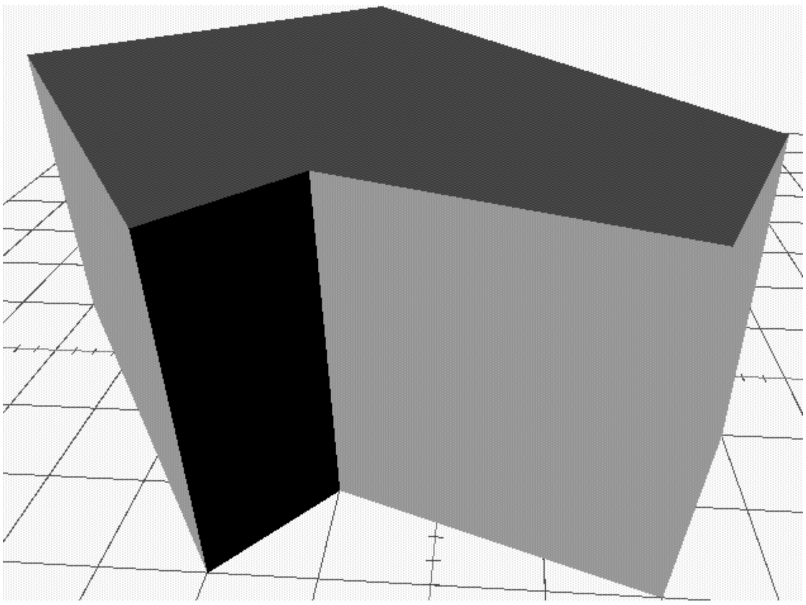

Abb. 4.4

2.3 Vom Grundriss zum Labyrinth

Wir zeichnen den Grundriss eines Labyrinths mit einem so genannten Homedesigner (*Home Design 3D*) wie in **Abbildung 5.1**; lassen diesen automatisch extrudieren, um das Labyrinth dann von oben im „Rundflug“ zu betrachten (**Abb. 5.2** und **5.3**) und um es anschließend zu begehen (**Abb. 5.4**).

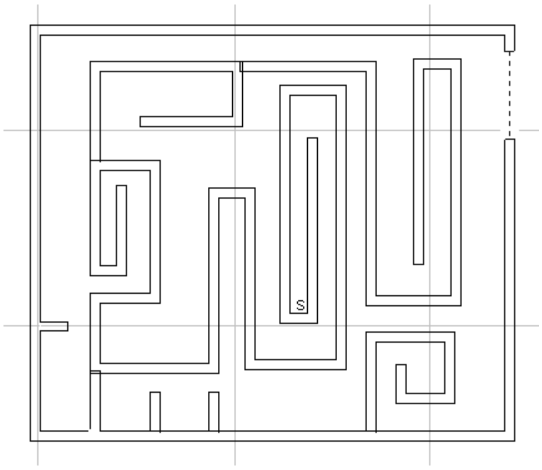

Abb. 5.1

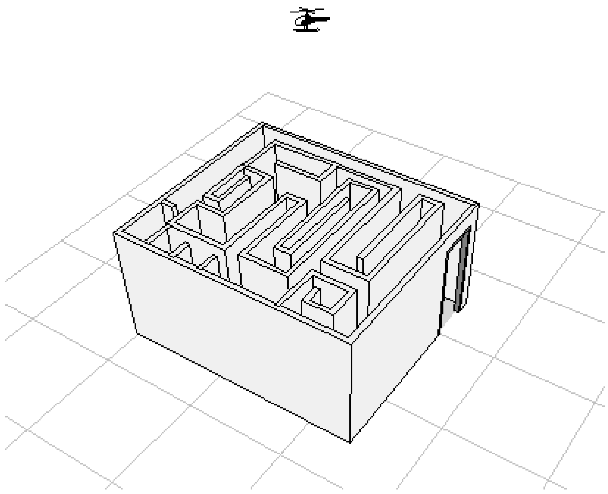

Abb. 5.2

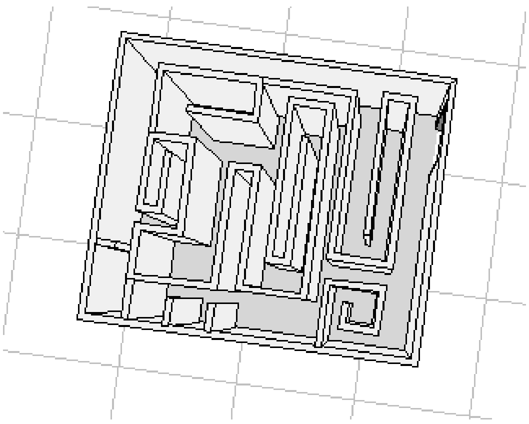

Abb. 5.3

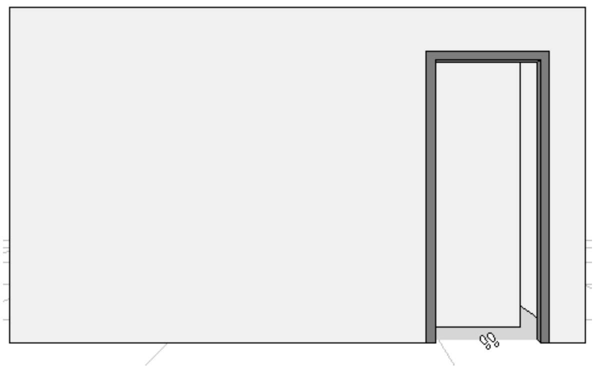

Abb. 5.4

2.4 Vom Dreitafelbild zum Körper

Zur Generierung z.B. eines Quaders gehen wir in *CAD-3D* folgendermaßen vor: Im Grundriss (G) wird ein Rechteck selbst zu wählender Dimensionierung aufgezogen (**Abb. 6.1**), danach entsprechend der Aufriss (A) des Quaders (**Abb. 6.2**); dabei wird der Seitenriss automatisch festgelegt. Man gewinnt den referenzierbaren Quader in parallelprojektiver Darstellung (**Abb. 6.3**). Durch Einzeichnen weiterer Risse erzeugt man weitere Quader, die mit der booleschen Operation des Vereinigens aus Quadern zusammengesetzte Körper ergeben (**Abb. 6.4**).

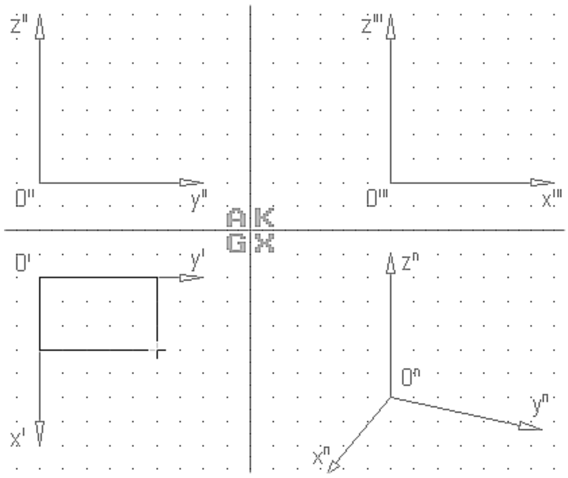

Abb. 6.1

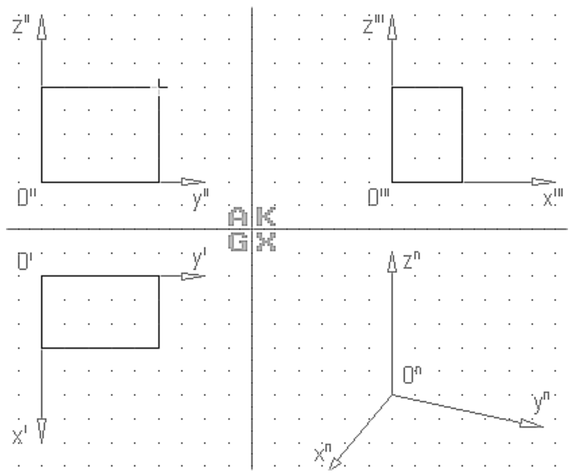

Abb. 6.2

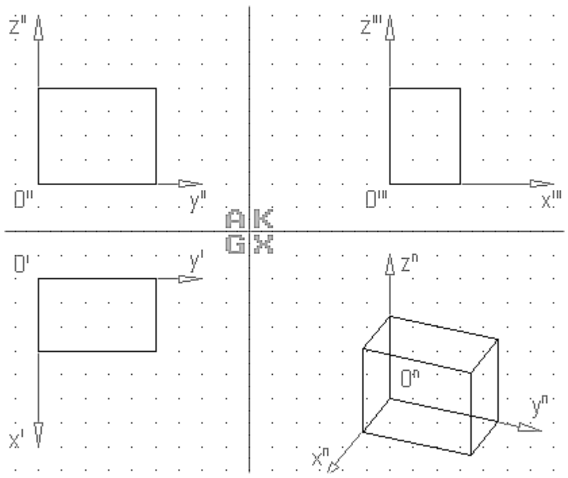

Abb. 6.3

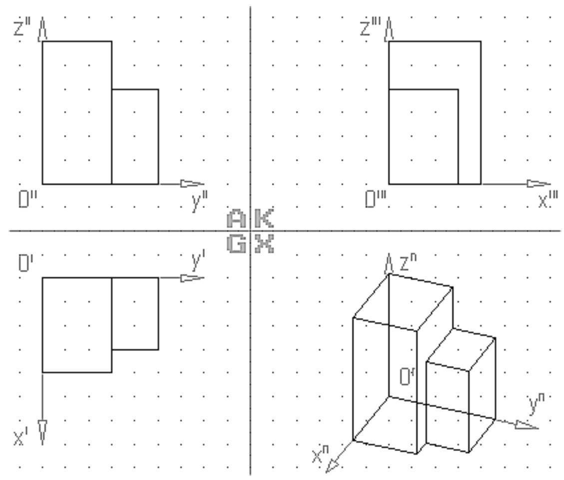

Abb.6.4

2.5 Von der Ebene auf die Kugel

Wir benutzen das neuartige plattformunabhängige geometrische Konstruktionswerkzeug CINDERELLA, um Konfigurationen der (reellen) euklidischen Ebene automatisch auf die Kugeloberfläche zu transformieren: In **Abbildung 7.1** werden ein Dreieck ABC mit seinen Trägergeraden und eine Gerade g mit den linear geordneten Punkten Q, P, R auf die Kugel abgebildet. Das Dreieck geht in ein Kugeldreieck über, das von Groß-kreisen (das sind Kreise, deren Mittelpunkte mit dem Kugelmittelpunkt übereinstimmen) getragen werden; die Gerade wird in einen Großkreis überführt (Großkreise auf der Kugel entsprechen also den Geraden in der Ebene); die lineare Ordnung der Geradenpunkte geht verloren (so liegt jetzt z.B. P sowohl zwischen Q und R als auch zwischen R und Q).

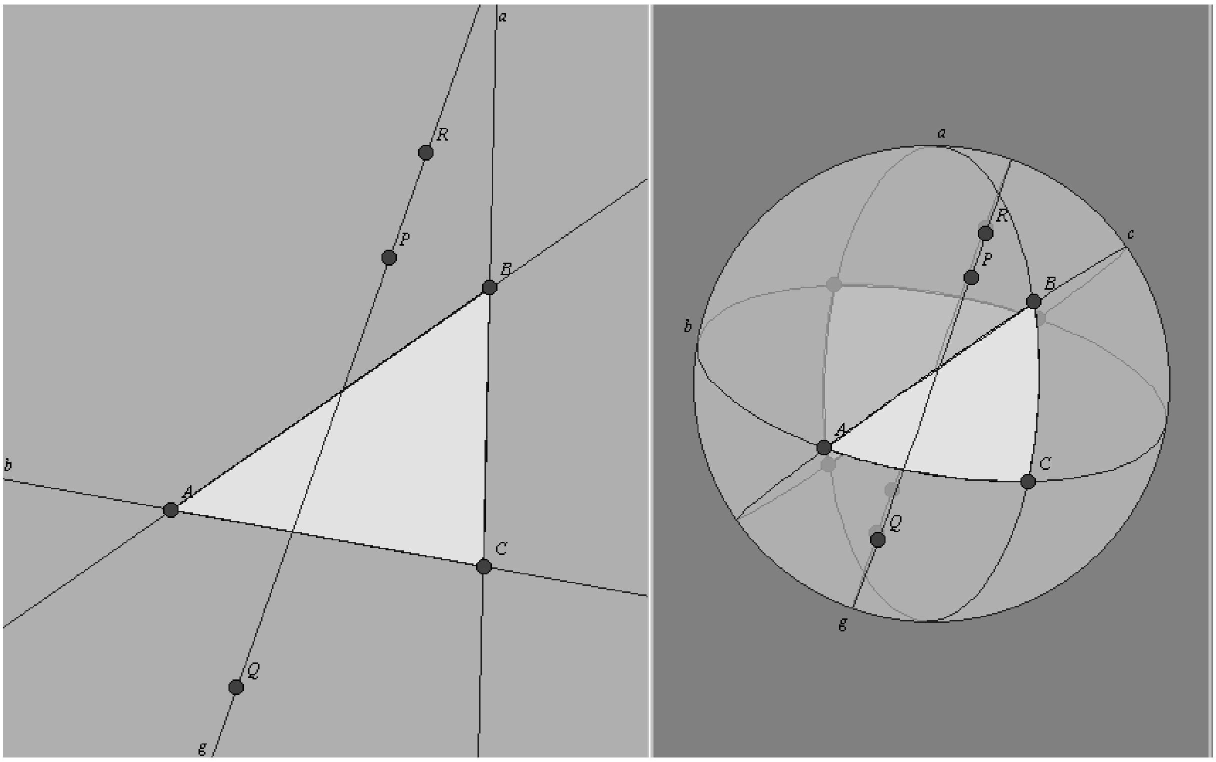

Abb. 7.1

Der Schnittpunkt S zweier Geraden wird zum Schnittpunkt zweier „Großkreisgeraden“ (**Abb. 7.2**).

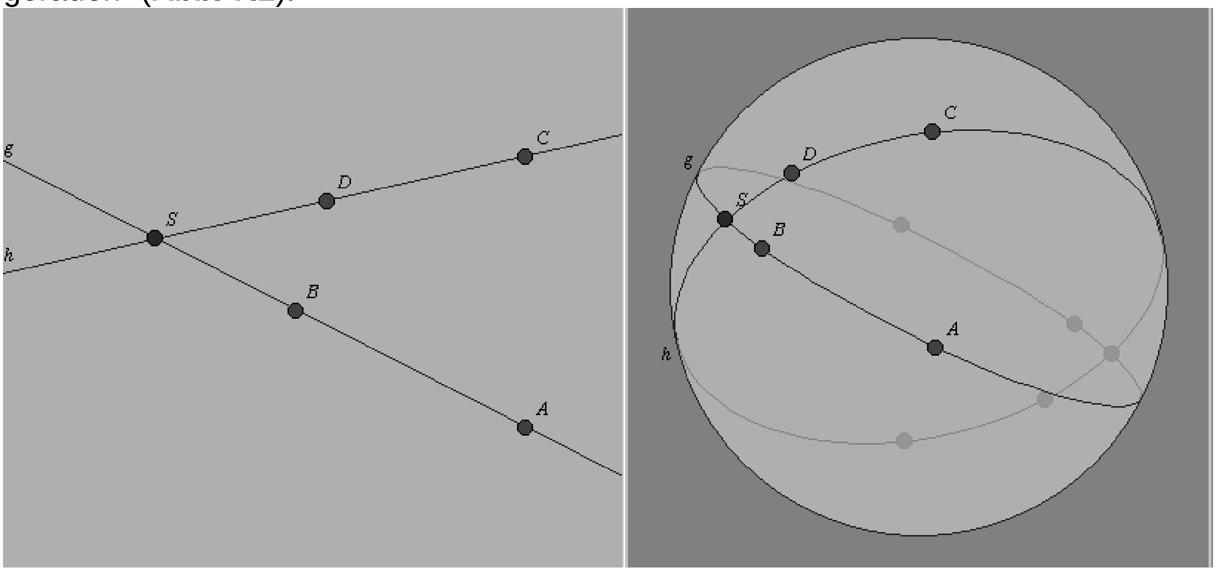

Abb. 7.2

Zwei verschiedene parallele Geraden ergeben Großkreise, die einander schneiden (**Abb. 7.3**) – das war zu erwarten, denn zwei verschiedene Großkreise schneiden sich immmer. Auf der Kugel gibt es also keine Parallelität von Großkreisgeraden. Folglich existiert keine Parallelverschiebung, Punktspiegelung, Schubspiegelung und zentrische Streckung; es gibt keine (inkongruenten) ähnlichen Dreiecke und natürlich keine Ähnlichkeitsgeometrie.

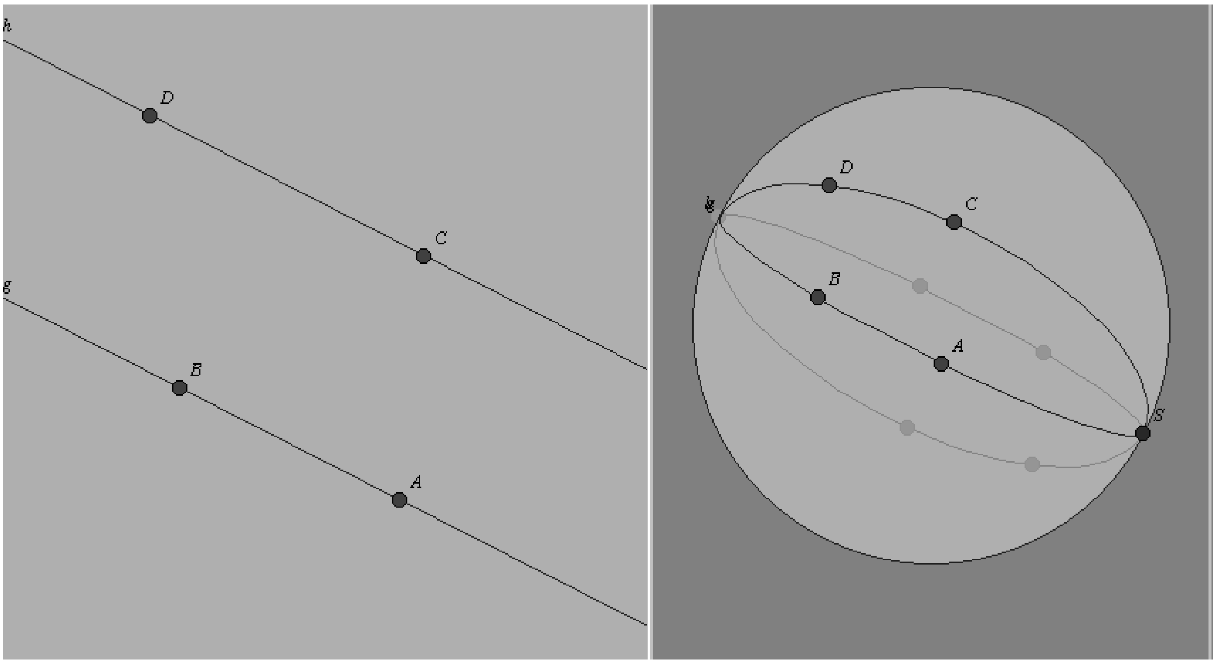

Abb. 7.3

Die Kongruenzgeometrie als Spiegelungsgeometrie mit dem „Dreispiegelungsatz“ kann aber voll entwickelt werden. Die **Abbildung 7.4** zeigt die Analogie zwischen Geraden- und Großkreisspiegelung.

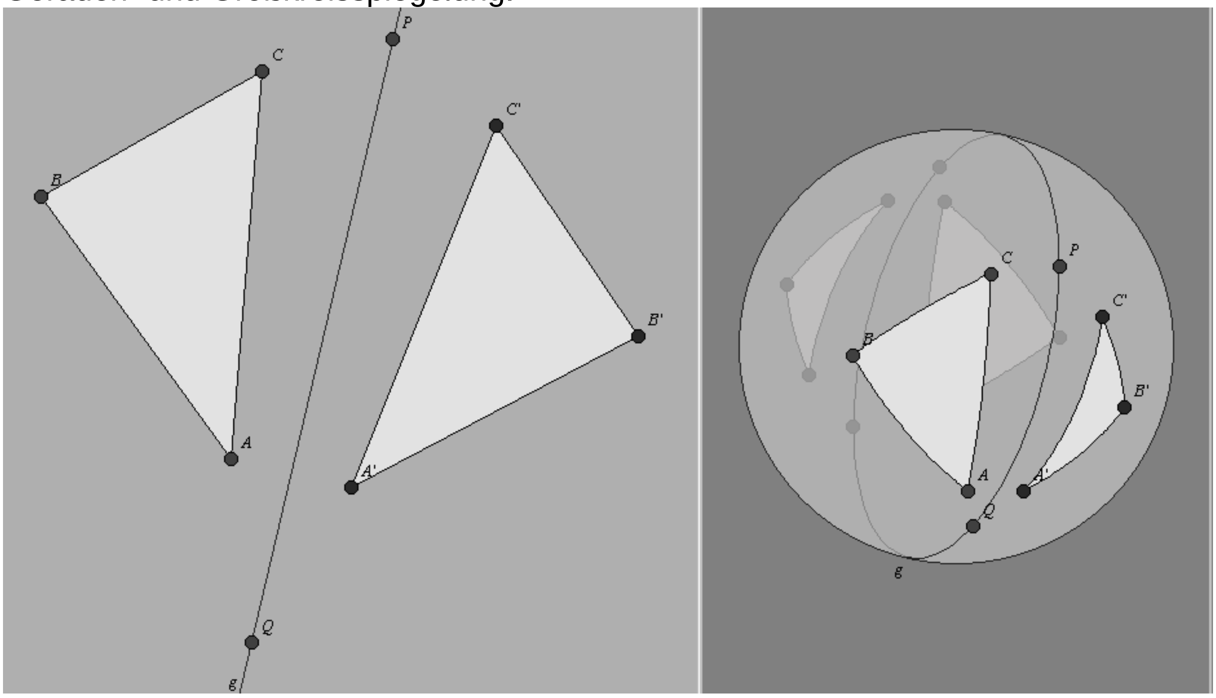

Abb. 7.4

Die Hintereinanderausführung zweier Großkreisspiegelungen ist stets eine Drehung (**Abb. 7.5**).

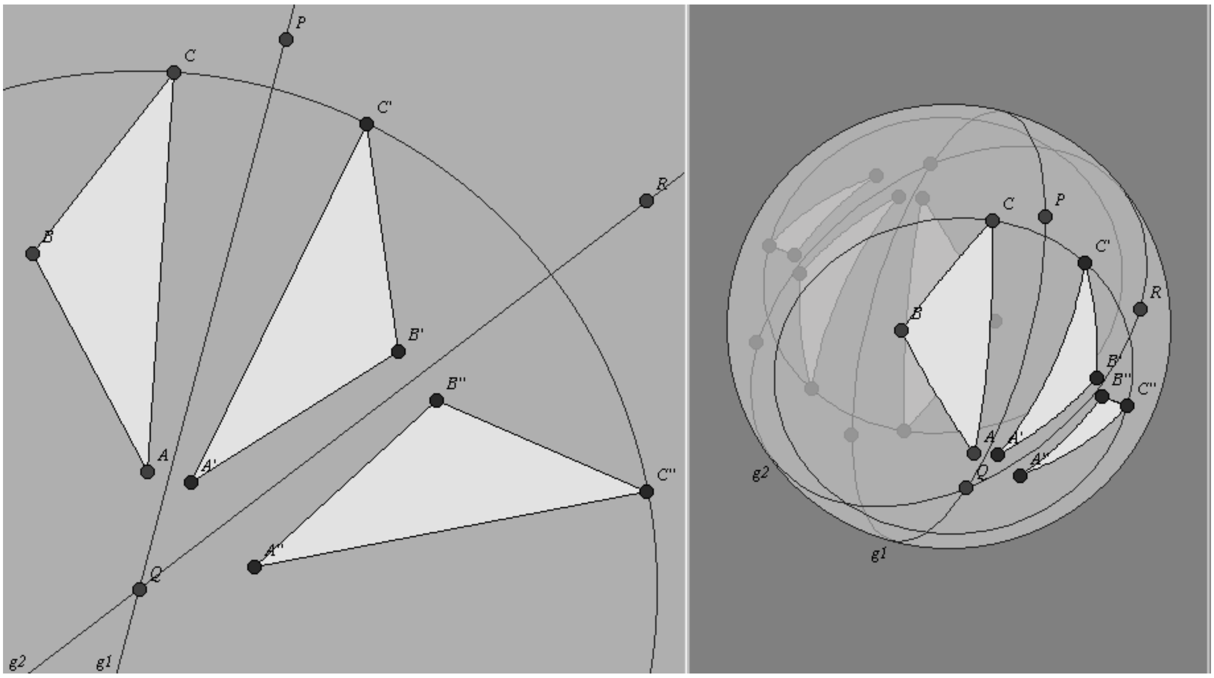

Abb. 7.5

In der **Abbildung 7.6** ist einer der Fälle des Dreispiegelungsatzes illustriert.

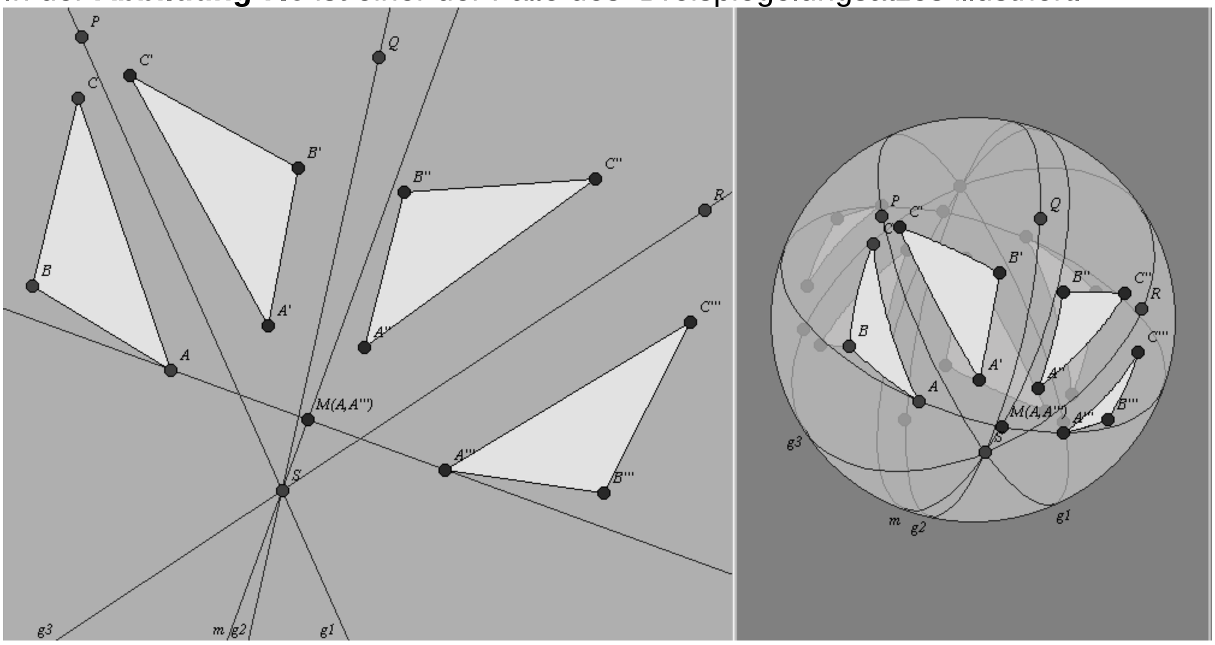

Abb. 7.6

Die in der (reellen) euklidischen Ebene konstruierten Schnittpunktkonfigurationen am Dreieck, z.B. die Mittelsenkrechten-, Winkelhalbierenden- und Höhenschnittpunktfigur, lassen sich automatisch auf die Kugel übertragen (**Abb. 7.7** bis **7.9**).

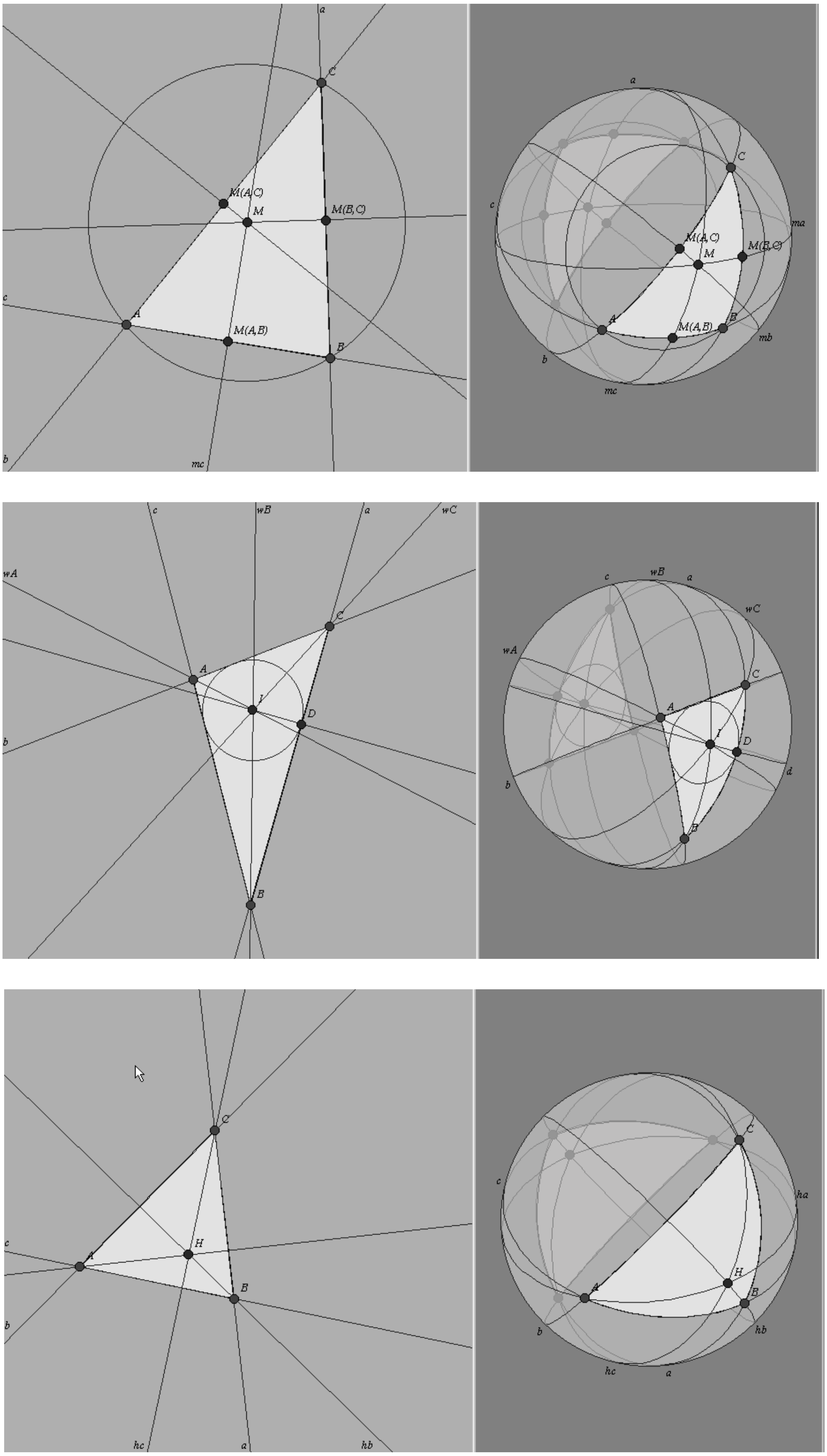

Abb. 7.7-7.9
Durch Variation der Lage der Eckpunkte A, B, C auf der Kugel variieren wir die sphärischen Konfigurationen.

Bei der Transformation eines Dreiecks wird seine Innenwinkelsumme größer als 180°; sie liegt immer zwischen 180° und 540°. – Zu den vier Dreieckskonstruktionen aus Dreiecksseiten und Innenwinkeln treten auf der Kugel die Konstruktion aus drei Winkeln und die Konstruktion aus zwei Winkeln mit einer Gegenseite hinzu usw.
Wir werfen abschließend die Frage auf, wie denn Ortskurven besonderer Dreieckspunkte (oder allgemeiner ebene algebraische Kurven nicht beschränkter Art) auf der Kugel aussehen.

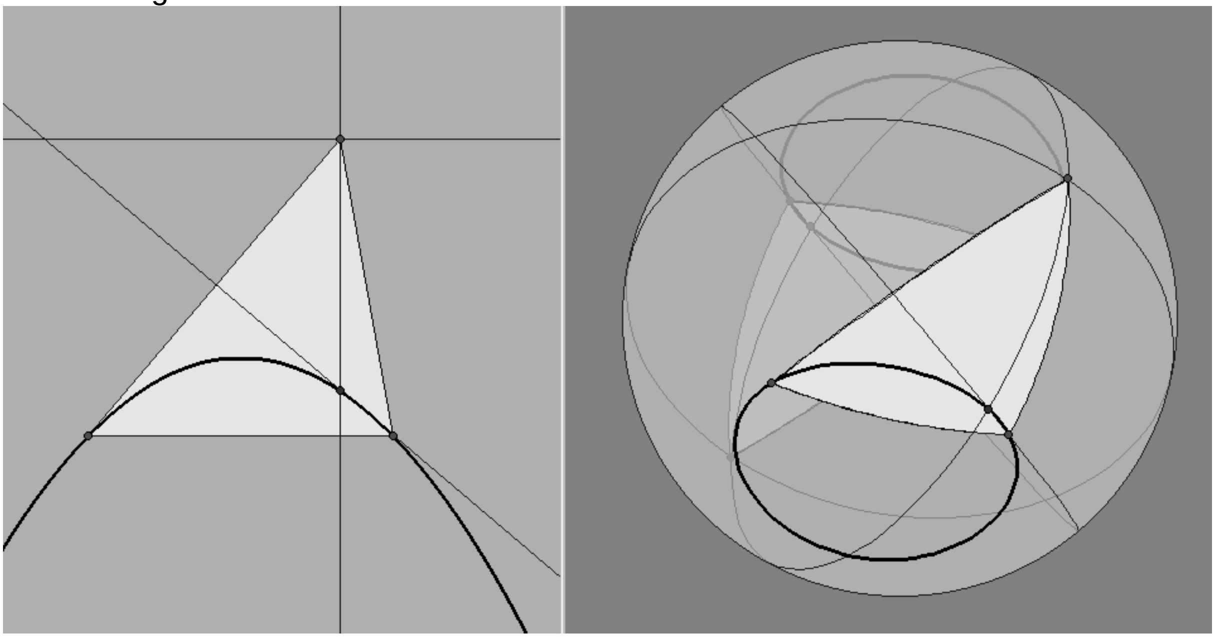

Abb. 8.1

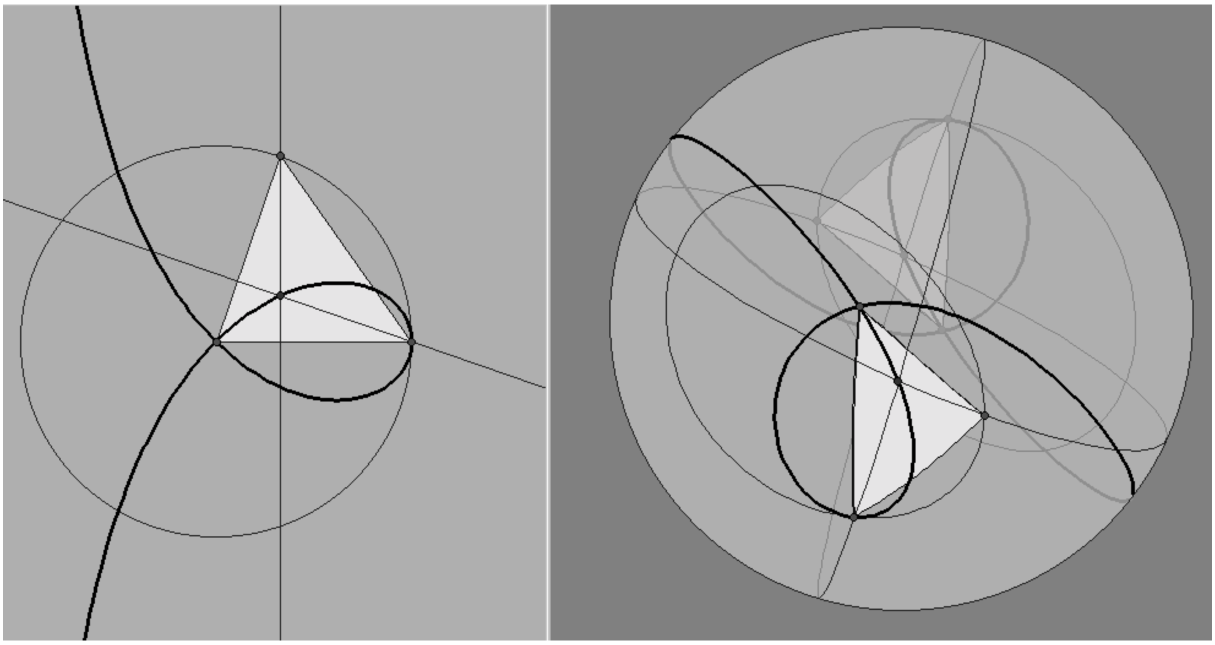

Abb. 8.2

Bewegt sich eine Dreiecksecke auf einer Geraden, so beschreibt der Höhenschnittpunkt eine Parabel, deren Bild auf der Kugel eine geschlossene Kurve ovaler Art ergibt wie man sie auch für „ebene“ Ellipsen erhält (**Abb. 8.1**). Auf einer algebraischen Kurve der Ordnung 4 läuft der Höhenschnittpunkt, wenn die Bahn einer Ecke des Dreiecks ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt und Radiuspunkt die zwei anderen Eckpunkte bilden (**Abb. 8.2**).

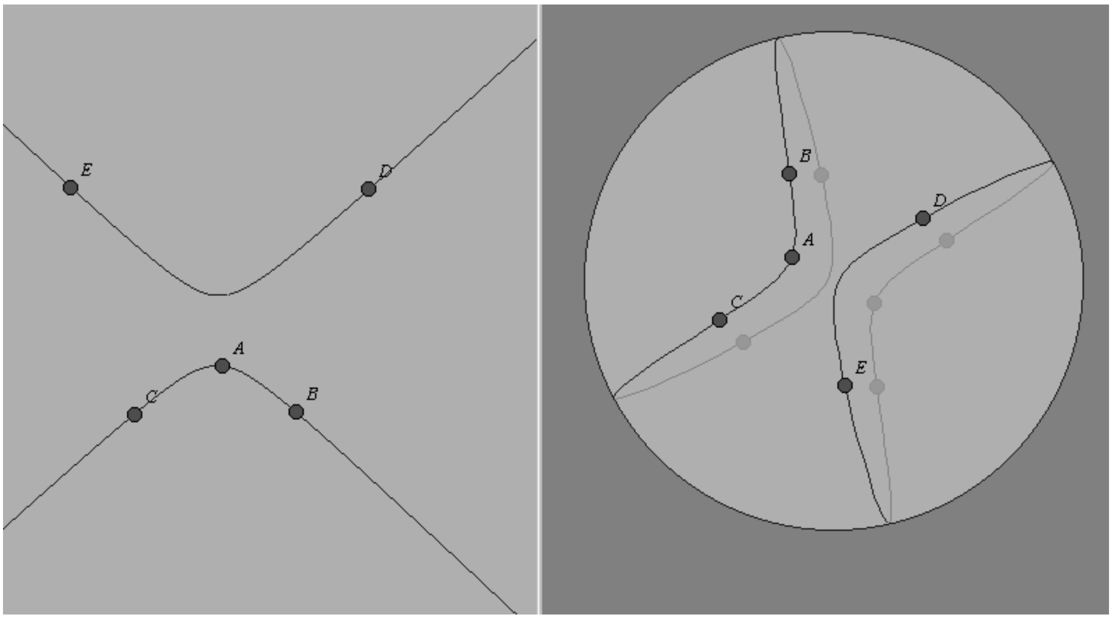

Abb. 9
Die Abbildung 9 zeigt Form einer Hyperbel auf der Kugel, die dort ebenfalls zweifach achsensymmetrisch ist.

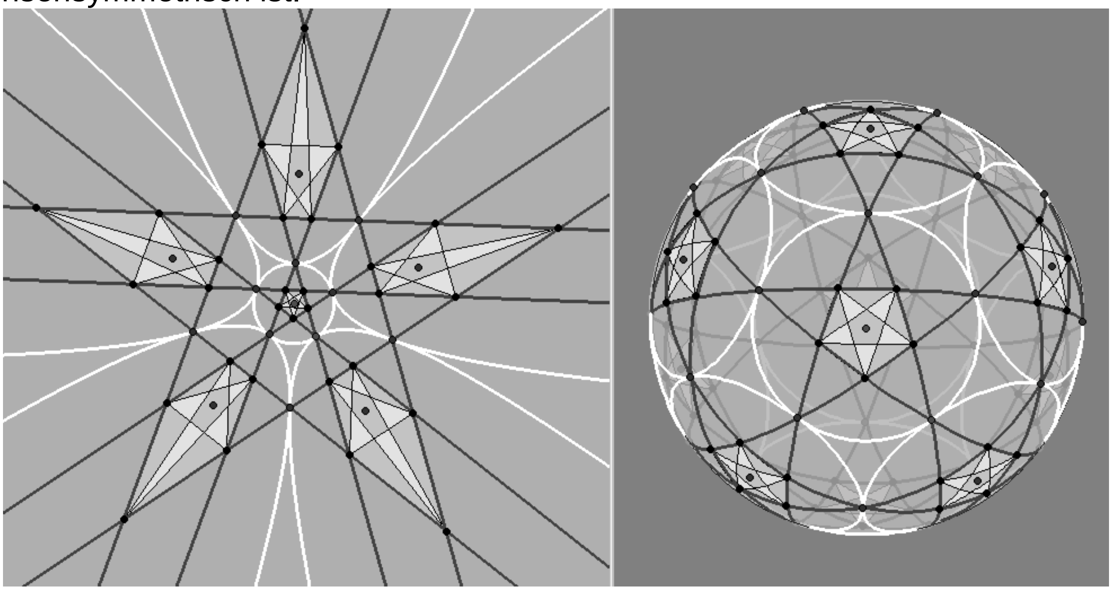

Abb.10

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer ästhetisch wirkenden symmetrischen Konfiguration, deren Rotation um das Symmetriezentrum auf der Kugeloberfläche eine schöne Animation ergibt (**Abb.10**).

3 Verwendete Programme

BAUWAS 3.0 (Konstruktionsprogramm zur Entwicklung von Raumvorstellung)
Autoren: Meschenmoser et al.; MACH MIT e.V.
CAD-3D 2.0 (CAD-System für Geometrisches Zeichnen)
Autor: Stachel, H.; TU Wien 1994
CAD3-D 1.0 (Low-Cost-CAD-System)
Autoren: Davis, S. et al.; Smart Software Inc. 1996
CINDERELLA 1.0 (Interaktive Geometrie-Software)

Autoren: Richter-Gebert, J. u. Kortenkamp, U.; Heureka-Klett, 1999
Home Design 3D 3.0 (Programm für die Haus- und Wohnraumplanung)
Autoren: Davis, S. et al.; Smart Software Inc. 1995
KÖRPERGEOMETRIE 1.0 (Visualisierungs- und Konstruktionswerkzeug)
Autoren: Bauer, H. et al.; Cornelsen Software, 1999
NETS 1.0 (Tutorielle Software zur Behandlung von Netzen)
Autoren: Schumann, H. u. Alavidze, T. ; unveröffentlicht;
PH Weingarten 1997-1999